کارن اولنبک، برندهٔ جایزهٔ آبل ۲۰۱۹

رضا سیدعلی
پژوهشکدهٔ ریاضیات

فرهنگستان علوم و ادبیات نروژ جایزهٔ آبل ۲۰۱۹ را به کارن کسکولا اولنبک (Karen Keskulla Uhlenbeck) استاد بازنشستهٔ دانشگاه تکزاس در آستین، آمریکا، اهدا کرد. وی نخستین زنی است که به دریافت این جایزه نائل شده است. دلیل اهدای جایزهٔ آبل به اولنبک، «دستاوردهای پیشگامانهٔ او در معادلات دیفرانسیل جزئی هندسی، نظریهٔ پیمانه‌ای و سیستم‌های انتگرال‌پذیر، و تأثیر اساسیِ تحقیقات او بر آنالیز، هندسه، و فیزیک ریاضی» عنوان شده است.

جایزهٔ آبل ــ به نام نیلس هنریک آبل ریاضیدان بزرگ نروژی در قرن نوزدهم ــ در سال ۲۰۰۲ بنیان نهاده شد و از سال ۲۰۰۳ هر سال به یک یا دو ریاضیدان پیشکسوت که دستاورد آنها تأثیر عمیق و ماندگاری در ریاضیات داشته، تعلق گرفته است. در میان برندگان قبلی این جایزه، نام‌های بسیار مشهوری چون ژان پیر سر، مایکل اتیا، پیتر لکس، میخائیل گروموف، جان میلنر، آندره سمردی، پیردلین، یاکوف سینایی، جان نش، اندرو وایلز، و رابرت لنگ‌لندز دیده می‌شود. مبلغ جایزهٔ آبل ۶ میلیون کرون نروژ (تقریباً ۷۵۰ ۰۰۰ دلار آمریکا) است.

کارن اولنبک در سال ۱۹۴۲ در کلیولندِ اوهایو به دنیا آمد. مدرک کارشناسی را در ۱۹۶۴ از دانشگاه میشیگان گرفت. تحصیلات تکمیلی را در دانشگاه براندایس در ماساچوست گذراند و مدارک کارشناسی ارشد و دکتری را به ترتیب در سال‌های ۱۹۶۶ و ۱۹۶۸ از آن دانشگاه دریافت کرد. سپس در دانشگاه‌های مختلفی به تدریس و تحقیق پرداخت و از ۱۹۸۸ در دانشگاه تکزاس در آستین مشغول کار شد. وی در حال حاضر استاد ممتاز بازنشستهٔ آن دانشگاه، استاد ممتاز میهمان در انستیتوی مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون، و محقق ارشد میهمان در دانشگاه پرینستون است.

در مقالهٔ پیش‌رو، شرحی به قلم یکی از پژوهشگران پژوهشکدهٔ ریاضیات دربارهٔ کارهای ریاضی کارن اولنبک می‌خوانید.

جایزهٔ آبل ۲۰۱۹ به خاطر دستاوردهای اساسی کارن اولنبک در آنالیز هندسی به او تعلق گرفت. تحقیقات اولنبک مبنایی برای پیشرفت‌های بسیار در آنالیز هندسی و معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) طی چهار دههٔ گذشته فراهم کرده است. آنالیز هندسی، حوزه‌ای از ریاضیات است که در آن، تکنیک‌هایی از آنالیز و معادلات دیفرانسیل برای حل‌وفصل مسائل هندسی به کار گرفته می‌شود. یک رهیافت مهم در آنالیز هندسی، استفاده از روش‌های وردشی (variational) در حل مسئله‌های هندسی است. به طور سنتی، روش‌های وردشی از فیزیک گرفته شده‌اند که در آنجا حالت‌های مانای کنش (action)ها یا به زبان ریاضی، تابعگون (functional)ها مطالعه می‌شوند. این نوع روش در حل معادلات دیفرانسیل بسیار موفقیت‌آمیز است. فرض کنید علاقه‌مند به حل یک معادلهٔ دیفرانسیل هستیم. ایدهٔ مورد نظر این است که به تابعگونی دست یابیم که نقاط بحرانی‌اش متناظر با جواب‌های آن معادله باشند. بنابراین، به جای حل مستقیم معادله، سعی می‌کنیم وجود یک نقطهٔ بحرانی را برای آن تابعگون نشان دهیم.

اولنبک توانست با استفاده از روش‌های وردشی بسیاری از مسئله‌های مهم در نظریهٔ نگاشت‌های همساز (harmonic)، رویه‌های مینیمال، و نظریهٔ پیمانه‌ای را حل کند. در این مقاله، بعضی از کارهای او از دههٔ هشتاد میلادی به بعد را به اختصار شرح می‌دهیم و خوانندهٔ علاقه‌مند را برای ملاحظهٔ بحث جامع‌تر به مقالهٔ زیبای دانلدسون در این زمینه [3] ارجاع می‌دهیم.

نگاشت‌های همساز

چنانکه در بالا گفته شد، روش‌های وردشی با موفقیت در ریاضیات به کار گرفته شده‌اند. یک نمونهٔ آن در هندسه، اثباتی برای وجود ژئودزیک‌های مینیمم‌کنندهٔ فاصله روی خمینه‌های ریمانی است. فرض کنید (M, g) یک خمینهٔ ریمانی باشد و $p, q \in M$. فضای مسیر (قطعه‌قطعه) هموار از p تا q، یعنی همهٔ نگاشت‌های قطعه‌قطعه هموار

کارن اولنبک

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $\gamma(0) = p$ و $\gamma(1) = q$. تابعگون انرژی $\mathcal{F}$ روی این فضا را به صورت $\mathcal{F}(\gamma) = \int_0^1 ||\gamma'(t)||_g^2 dt$ تعریف می‌کنیم که در آن $||\gamma'(t)||_g$ نرم نسبت به متریک ریمانی g است. با ترکیب کردن قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و نابرابری هولدر (Holder) به ازای هر $a, b \in (0,1)$ داریم

$$d_g(\gamma(a), \gamma(b)) \leq \int_a^b ||\gamma'(t)||dt \leq \mathcal{F}(\gamma)^{\frac{1}{2}} |a-b|^{\frac{1}{2}}.$$

حال تصور کنید $\alpha = \inf_\gamma \mathcal{F}(\gamma)$ و نیز فرض کنید γ_i دنباله‌ای از مسیرهای مینیمم‌کننده باشد، یعنی $\mathcal{F}(\gamma_i) \to \alpha$ وقتی $i \to \infty$. در اینجا γ_i یکسان‌پیوسته (equicontinuous) است و بنا به قضیهٔ آرزلا-اسکولی (Arzela-Ascoli)، یک زیردنبالهٔ همگرایی دارد. نشان‌دادن این مطلب دشوار نیست که حد، قطعه‌قطعه هموار است و مینیممی از تابعگون انرژی است. بنابراین، یک ژئودزیکِ مینیمم‌ساز است. نکتهٔ بسیار مهم در این مسئله این است که یک کران یکنواخت بر تابعگون انرژی $\mathcal{F}(\gamma_i)$، یکسان‌پیوستگی (equicontinuty) دنبالهٔ γ_i را نتیجه می‌دهد. چنین ویژگی را شرط پَلِس-اسمیل (Palais-Smale) می‌نامند.

نگاشت‌های همساز، تعمیم ژئودزیک‌ها به ابعاد بالاتر هستند. فرض کنید M و N خمینه‌هایی ریمانی باشند و $u : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد. انرژی u را به صورت $\mathcal{F}(u) = \int_M |\nabla u|^2 dV_M$ تعریف می‌کنیم که در آن، گرادیان و نرم نسبت به متریک ریمانی روی M در نظر گرفته می‌شوند و dV_M فرم حجمی M است. نگاشت‌های همساز، نقاط بحرانی $\mathcal{F}$ هستند. ولی برخلاف موردِ ژئودزیک‌ها، در اثبات وجود نقاط بحرانی $\mathcal{F}$، دشواری‌های اساسی پیش می‌آید. یک مشکل این است که اگر $\dim M \geq 2$ ، نشاننده (embedding)ای از $W^{1,2}$ به C^0 نداریم. بنابراین، کنترل یکنواخت بر انرژی، یکسان‌پیوستگی را تضمین نمی‌کند. با استفاده از اصطلاحات روش‌های وردشی می‌گوییم که $\mathcal{F}$ در شرط پَلِس-اسمیل صدق نمی‌کند. برای ملاحظهٔ این مطلب، توجه کنید که وقتی $\dim M = 2$ ، تابعگون $\mathcal{F}$ به طور همدیس ناوردا (conformally invariant) است. از اینجا معلوم می‌شود که به ازای $M = S^2$ می‌توانیم خانواده‌ای نافشرده از نگاشت‌ها با انرژی برابر بسازیم. پس قضیهٔ آرزلا-اسکولی را نمی‌توان به طور مستقیم برای اثبات همگرایی زیردنباله‌ای از دنبالهٔ مینیمم‌کننده به کار برد.

ساکس (Sacks) و اولنبک در مقالهٔ بسیار تأثیرگذار خود [5] حالتی را که M یک خمینهٔ ریمانی ۲ بعدی باشد بررسی کردند. چنانکه در بالا گفته شد، شرط پَلِس-اسمیل در این مسئله صادق نیست و بنابراین، نمی‌توان روش‌های وردشی مستقیم را به کار برد. برای غلبه بر این مشکل، آنها تابعگون‌های $\mathcal{F}_\alpha = \int_M (1 + |\nabla u|^2)^\alpha dV_M$ را به ازای $\alpha > 1$ بررسی کردند. نشانندهٔ سوبولُف (Sobolev embedding) $W^{1,2} \hookrightarrow C^0$ را به ازای $p > 2$ داریم.

بنابراین، کرانی یکنواخت بر $\mathcal{F}_\alpha$، یکسان‌پیوستگی را برای هر دنبالهٔ مینیمم‌کنندهٔ $\mathcal{F}_\alpha$ نتیجه می‌دهد. پس، نشان دادن این موضوع که تابعگون‌های $\mathcal{F}_\alpha$ یک نقطهٔ بحرانی u_α ، به‌ازای $\alpha > 1$، دارند کار دشواری نیست. گام اصلی در استدلال آنها، حدگیری از u_α است وقتی $\alpha \to 1$. آنها با استفاده از یک براورد انرژی کوچک که ثابت کردند، نشان دادند که صرف‌نظر از یک مجموعهٔ متناهی بر M، زیردنباله‌ای از u_α در C^∞-توپولوژی به u میل می‌کند. سپس با اثبات یک قضیهٔ تکینهٔ برداشتنی (رفع‌کردنی)، نشان دادند که u را می‌توان به طور هموار به M گسترش داد. آنها در عین حال کشف کردند که در این فرایند ممکن است بک پدیدهٔ تشکیل حباب رخ دهد. به بیان اجمالی، اگر یک قرص بسیار کوچک در M گسترانده شده و به کره‌ای در N تبدیل گردد، حباب تشکیل می‌شود. این پدیدهٔ تشکیل حباب در بسیاری از مسائل در هندسه و معادلات دیفرانسیل جزئی، وقتی با معادلات نیمه‌خطی در بعد بحرانی سروکار داریم، رخ می‌دهد. ساکس و اولنبک در تحقیق خودشان ابزارهای لازم را برای مطالعهٔ مسائل جالب در هندسه و آنالیز پدید آوردند.

نظریهٔ پیمانه‌ای

تعمیمی از معادلات ماکسول به‌وسیلهٔ یانگ (Yang) و میلز (Mills) سرآغاز نظریهٔ پیمانه‌ای در فیزیک نظری بود. بعداً ریاضیدان‌ها هم به نظریهٔ پیمانه‌ای علاقه‌مند شدند. مهمترین اشیا در نظریهٔ پیمانه‌ای، التصاق (connection)ها روی کلاف‌های اصلی هستند. برای یک

التصاق مفروض، می‌توانیم خمیدگی (انحنا) را تعریف کنیم. مشابه با موردِ نگاشت‌های همساز، یک تابعگون انرژی (تابعگون یانگ‌ـمیلز) را می‌توان روی فضای التصاق‌ها تعریف کرد. مسئلهٔ اصلی در نظریهٔ پیمانه‌ای یافتن التصاق‌های یانگ‌ـمیلزی است که نقطه‌های بحرانی تابعگون یانگ‌ـمیلز باشند. حالتی که اهمیت خاص دارد آن است که خمینهٔ پایه، چهاربعدی باشد. مشابهت‌های بسیاری بین این مسئله و مسئلهٔ نگاشت همساز وجود دارد. همین وضعیت در مورد نشانندهٔ سوبولُف پیش می‌آید. ولی ویژگی کاملاً جدیدی از این مسئله، کنشِ گروه پیمانه‌ایِ بینهایت‌بعدی است که تابعگون یانگ‌ـمیلز را حفظ می‌کند. این موضوع سطح دیگری از ظرافت را در این مسئله پدید می‌آورد. اولنبک چند حکم مشهور را در نظریهٔ پیمانه‌ای چهاربعدی ثابت کرد. یکی از این نتایج مهم، یک قضیهٔ فشردگی در مورد التصاق‌های یانگ‌ـمیلز [6] است. یک نتیجهٔ مهم دیگر، قضیهٔ تکینهٔ برداشتنی او [7] است. این قضیه حاکی است که یک التصاق خوددوگان روی گوی سوراخ‌شدهٔ چهاربعدی با انرژی متناهی به طور هموار قابل گسترش به مبدأ است. کارهای او مبنای بسیاری دستاوردهای ریاضی از قبیل دستاورد دانلدسون در مورد خمینه‌های چهاربعدی، و کار تاوبز (Taubes) در مورد چسباندن التصاق‌های خوددوگان بوده است.

نتیجهٔ مهم دیگری که اولنبک به دست آورد، در مورد وجوه متریک‌های ارمیت‌ـاینشتین روی کلاف‌های برداریِ تمام‌ریختِ پایدار بود. او و یاو (Yau) در اثر مشترکی [8] ثابت کردند که کلاف برداریِ تمام‌ریخت روی یک خمینهٔ کیلر (Kähler) فشرده یک متریک ارمیت‌ـاینشتین می‌پذیرد اگر آن کلاف، پایدار باشد. نتیجهٔ آنها نتایج قبلی ناراسیمهان‌ـسشادری (Narasimhan-Seshadri) [4] و دانلدسون ([1]و [2]) را تعمیم می‌دهد. التصاق چرن (Chern) متریک ارمیت‌ـاینشتین یک التصاق یانگ‌ـمیلز و بنابراین، یک نقطهٔ بحرانی تابعگون یانگ‌ـمیلز است. اولنبک و یاو در اثباتشان از روش‌های وردشی استفاده نکردند، بلکه روش پیوستگی را به کار گرفتند. فرض کنید (M,ω) یک خمینهٔ کیلر فشرده و $E \to M$ یک کلاف برداری تمام‌ریخت باشد. یک متریک ارمیتی h روی M ارمیت‌ـاینشتین نامیده می‌شود اگر $\Lambda F_{(E,h)} = \mu(E) I_E$. در اینجا Λ عملگر اثر است که روی $(1,1)$ فرم‌ها نسبت به فرم کیلری ω عمل می‌کند، $F_{(E,h)}$ خمیدگی التصاق چر (E,h)، و $\mu(E)$ شیب E است که یک ثابت توپولوژیک است. این یک PDE غیرخطی مرتبهٔ دوم نسبت به h است. آنها با یک متریک دلخواه h_0 شروع کردند و خانواده‌ای از معادله‌های $\Lambda F_{h_t} = k_t$ به ازای $t \in [0,1]$ را بررسی کردند که K_t مسیر همواری از خودریختی E است که $K_0 = \Lambda F_{h_0}$ را به $K_1 = \mu(E) I_E$ می‌پیوندد. فرض کنید

$$I = \{t \in [0,1] \mid \text{جوابی دارد } \Lambda F_{h_t} = K_t\}.$$

هدف این است که نشان دهیم $1 \in I$. توجه کنید که $I \neq \emptyset$ چون $0 \in I$. آنها نشان دادند که I در $[0,1]$ هم باز است و هم بسته، و بنابراین $I = [0,1]$. برای نشان دادن اینکه I باز است، آنها از قضیهٔ تابع وارون استفاده کردند. دشوارترین بخشِ اثبات، اثبات بسته‌بودن است. به این منظور لازم بود حکمی مبنی بر فشردگی جواب‌های $\Lambda F_{h_t} = K_t$ ثابت کنند. آنها نشان دادند که اگر فشردگی برقرار نباشد، آنگاه یک زیربافهٔ (subsheaf) منسجمِ ناپایدارکننده برای E وجود دارد و بنابراین E پایدار نیست.

مراجع

1. S.K. **Donaldson**, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18**(2) (1983), 269-277.
2. S.K. **Donaldson**, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. (3) **50**(1) (1985), 1-26.
3. Simon **Donaldson**, *Karen Uhlenbeck and the calculus of variations*, Notices of the American mathematical society **66**(1) (2019), DOI 10.1090/noti1806.
4. M.S. **Narasimhan** and C.S. **Seshadri**, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **82** (2965), 540-567.
5. J. **Sacks** and K. **Ulenbeck**, *The existence of minimal immersions of 2-sheres*, Annals of Math. **113** (1981), 1-24.
6. K. **Uhlenbeck**, *Connections with L^p bounds on curvature*, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 31-42.
7. K. **Uhlenbeck**, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Commun. Math. Phys. **83** (1982), 11-29.
8. K. **Uhlenbeck**, and S.-T. **Yau**, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. S, suppl., S257-S293. Frontiers of the mathematical sciences: 1985 (New York, 1985).