آشنایی با فضاهای پرمایش


ایمان ستایش*، علی کمالی‌نژاد*

مفهوم فضاهای پرمایش (moduli spaces) به کرّات در کارهای مریم میرزاخانی ظاهر می‌شود. در این مقاله، فضاهای پرمایش خم‌ها را با روش‌های هندسی و جبری معرفی کرده، برخی از ویژگی‌های مقدماتی آنها را بیان می‌کنیم. مقاله را با قضیهٔ کانتسویچ به پایان می‌بریم که میرزاخانی در رسالهٔ دکتری خود اثبات جدیدی برای آن ارائه کرده است.

۱. مقدمه

مطالعهٔ فضاهای پرمایش و هندسهٔ آنها با بررسی فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ و همچنین گراسمانین (Grassmannian) آغاز شد. در این نگاه، فضای تصویری را به عنوان فضای پارامتری‌کنندهٔ همهٔ خطوط گذرنده از مبدأ در $\mathbb{R}^{n+1}$ درنظر می‌گیریم. به طور مشابه، گراسمانین $Gr(k,n)$ فضایی است که نقاط آن در تناظر یک‌به‌یک با زیرفضاهای خطی kبعدی از فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. اولین مطالعات در مورد این فضاها با کار پلوکر (J. Plücker) روی فضای $Gr(2,4)$ آغاز شد.

فضای گراسمانین $Gr(k,n)$ علاوه بر خمینه‌بودن، یک واریتهٔ جبری نیز هست و کلاف برداری $U(k,n)$ روی این فضا با خاصیت زیر موجود است:

قضیهٔ ۱: فرض کنید M یک واریتهٔ جبری است و E یک کلاف برداری روی M از مرتبهٔ k. اگر E زیرکلاف برداری کلاف بدیهیِ از مرتبهٔ n باشد، آنگاه یک نگاشت جبری و یکتای $\varphi : M \to Gr(k,n)$ وجود دارد به طوری که $E = \varphi^* U(k,n)$.

این قضیه به ما امکان می‌دهد که به جای مطالعهٔ کلاف‌های برداری روی خمینه‌های دلخواه، مطالعهٔ خود را روی $Gr(k,n)$ متمرکز کنیم و نتایج هندسی به‌دست‌آمده را توسط قضیهٔ فوق به خمینه‌های دلخواه تعمیم دهیم.

این یکی از ایده‌های رایج در زمینهٔ مطالعهٔ فضاهای پرمایش است. این فضاها به ما امکان می‌دهند که مطالعهٔ خود را بتوانیم به فضای خاصی محدود کنیم و به همین سبب بررسی هندسهٔ این فضاها حائز اهمیت است.

انتگرال‌های آبلی

محاسبهٔ مقدار انتگرال نامعین

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}$$

برای کسانی که با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنایی دارند مثال شناخته‌شده‌ای در انتگرال‌گیری است.

اگر تعریف کنیم $f(x,y) = y^2 - (x^2+ax+b)$، آنگاه انتگرال فوق را می‌توان به صورت $\int_{F_2} \frac{dx}{y}$ نمایش داد که در آن

$$F_2 := \{(x,y) | f(x,y) = 0\}.$$

بنابراین توانستیم انتگرال یک تابع پیچیده روی $\mathbb{R}$ را تبدیل به انتگرال ساده‌تری روی ناحیهٔ F_2 کنیم. همین کار را می‌توان در حالت‌های پیچیده‌تری مانند

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}}$$

* پژوهشکدهٔ ریاضیات

نیز انجام داد و آن را به صورت زیر نوشت

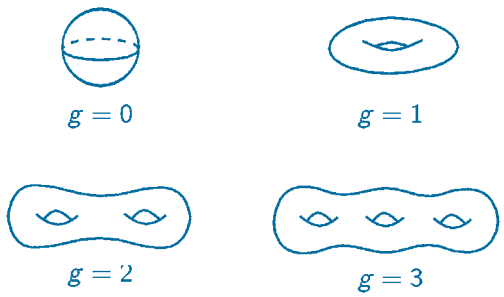
$$\int_{F_2} \frac{dx}{y}, \qquad F_3 := \{(x,y) | y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c\}.$$

پیش از ادامهٔ بحث تذکر چند نکته لازم است:

۱) تمام انتگرال‌های فوق را می‌توان به عنوان انتگرال‌های مسیری روی صفحهٔ مختلط در نظر گرفت و بنابراین هر کدام از رویه‌های F_2 و F_3 را نیز می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{C}^2$ در نظر گرفت.

۲) چون ما علاقه‌مند به مطالعهٔ هندسهٔ F_2 و F_3 هستیم می‌توانیم فشرده‌سازی‌شدهٔ این دو خمینه را در داخل $\mathbb{CP}^2$ در نظر بگیریم.

با توجه به نکات بالا، در هر کدام از این دو مثال به رویه‌ای فشرده می‌رسیم و این دو رویه را C_2 و C_3 می‌نامیم. رویه‌های فشرده را می‌توان برحسب گونای آنها که همان تعداد دستگیره‌های آنهاست رده‌بندی کرد:



برای تشخیص گونای هر یک از رویه‌های C_2 و C_3 از نگاشت تصویر کردن روی مؤلفهٔ y استفاده می‌کنیم. در صفحه تصویری $\mathbb{CP}^2$ این نگاشت تبدیل به نگاشتی به $\mathbb{CP}^1$ می‌شود که در مثال C^2 بالای هر نقطهٔ $\mathbb{CP}^1$ به استثنای ریشه‌های $x^2 + ax + b$ دقیقاً دو نقطهٔ متفاوت قرار دارند و بالای ریشه‌های این معادله دقیقاً یک نقطه قرار دارد. قضیهٔ مقدماتی زیر به ما کمک می‌کند که با استفاده از این اطلاعات گونای C_2 (و مشابهاً C_3) را محاسبه کنیم.

قضیهٔ ۲: برای هر مثلث‌بندی از رویهٔ فشرده و هموار X داریم:

$$2 - 2g(X) = v - e + r,$$

که در آن $g(X)$ گونای X و v تعداد رئوس مثلث‌بندی و e تعداد یال‌ها و r تعداد وجه‌هاست.

نتیجهٔ ۳: نگاشت $f : X \to Y$ بین دو رویهٔ فشرده و هموار X و Y با شرایط زیر داده شده است:

۱) نقاط $y_1, \cdots, y_m \in Y$ وجود دارند به طوری که $f^{-1}(y)$، به ازای هر $y \notin \{y_1, \cdots, y_m\}$، دقیقاً دارای n عضو است.

۲) $f^{-1}(y_i)$ دارای n_i نقطه است (به ازای $i = 1, \cdots, m$).

در این صورت،

$$2 - 2g(X) = n(2 - 2g(Y)) - \sum_{i=1}^{m} (n - n_i).$$

مثال با توجه به اینکه با استفاده از قضیهٔ اویلر برای گراف‌های مسطح داریم $g(\mathbb{P}^1) = 0$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$2 - 2g(C_2) = 2(2 - 0) - (2)$$
$$\Rightarrow g(C_2) = 0.$$

بنابراین C_2 نیز یکریخت با $\mathbb{P}^1$ است و در واقع استفاده از همین یکریختی است که محاسبهٔ انتگرال را ممکن می‌کند.

مثال برای C_3 داریم

$$2 - 2g(C_3) = 2(2) - (4)$$
$$\Rightarrow g(C_3) = 1.$$

بنابراین C_3 به عنوان رویه، یک چنبره است.

۲. فضای تایشمولر

همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، مطالعهٔ انتگرال‌های آبلی به طور طبیعی به مطالعهٔ یک چنبرهٔ مجهز به ساختار مختلط (یک خم بیضوی) منجر می‌شود. در این قسمت تلاش می‌کنیم تا به مرور مطالبی در مورد مسئلهٔ ساختارهای مختلط روی یک چنبره بپردازیم و در ادامه، این مسئله را برای رویه‌های با گونای بزرگتر از یک نیز به اختصار بررسی می‌کنیم.

پیش از آن که به مطالعهٔ رویه‌های ریمان با گونای g بپردازیم، توجه به این نکته می‌تواند روشن‌گر باشد که یکی از راه‌های معرفی ساختار مختلط روی یک رویهٔ ریمان، (علاوه بر روش مستقیم معرفی یک اطلس همدیس (conformal))، مجهزکردن رویهٔ مورد نظر به یک متریک ریمانی است. به عبارت دیگر، هرگاه رویهٔ بسته و جهت‌پذیری را به یک متریک ریمانی مجهزکنیم، خمینهٔ ریمانی ۲بعدی حاصل یک رویهٔ ریمان خواهد بود. این مشاهده کمک می‌کند تا راهی ملموس‌تر برای تجسم ساختارهای مختلط در اختیار داشته باشیم. از طرف دیگر، توجه به این نکته نیز ضروری است که مسئلهٔ بررسی ساختارهای مختلط مسئله‌ای است که جنبهٔ سرتاسری آن، بسیار حائز اهمیت است، زیرا با وجود آنکه تمامریخت (holomorphic) بودن را می‌توان در همسایگی یک نقطه بررسی کرد، اما رویه‌های ریمان به صورت موضعی شبیه یکدیگر هستند. به عبارت دیگر، از هر همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک هر نقطه روی یک رویهٔ ریمان، نگاشتی دوسویی و تمامریخت به همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک هر نقطهٔ دلخواهی روی یک

رویهٔ ریمان دیگر، وجود دارد. این مطلب نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ کلاسیک و آشنای زیر است.

قضیهٔ ۴: قضیهٔ نگاشت ریمان. اگر U یک زیر مجموعهٔ همبند ساده، باز، و ناتهی از صفحهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد که تمام $\mathbb{C}$ نیست، آنگاه نگاشت دوسویی تمامریختی از U به قرص واحد وجود دارد.

بنابراین، هرچند به کمک متریک یک رویهٔ ریمانی، می‌توان به ساختاری مختلط روی آن دست یافت، اما مشاهدهٔ فوق به سادگی نشان می‌دهد که مطالعهٔ ساختارهای مختلط با مطالعهٔ متریک‌های ریمانی دلخواه متفاوت است. به عبارت دیگر، متریک‌های ریمانی متفاوت، می‌توانند ساختار مختلط یکسانی را القا کنند. البته اگر توجه خود را به خانوادهٔ خاصی از متریک‌های ریمانی محدود کنیم، آنگاه این ارتباط می‌تواند روشن‌تر باشد. به عنوان مثال، اگر $g \geqslant ۲$ و توجه خود را به متریک‌های ریمانی با انحنای ثابت -۱ (متریک‌های هذلولوی) محدود کنیم، آنگاه یک دوسویی بین ساختارهای مختلط روی رویهٔ توپولوژیک با گونای g و متریک‌های هذلولوی روی آن وجود دارد.

قضیهٔ نگاشت ریمان، تعمیم آشنایی دارد که گامی بسیار اساسی در مطالعهٔ رویه‌های ریمان است.

قضیهٔ ۵: قضیهٔ یکنواخت‌سازی (uniformization theorem). هر رویهٔ ریمان همبند ساده، هم‌ارز است با کرهٔ ریمان $\mathbb{S}^۲$، صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$، و یا نیم‌صفحهٔ بالایی $\mathbb{H}$.

توجه کنید که قضیهٔ ۴ نه تنها رویه‌های ریمان همبند ساده را طبقه‌بندی می‌کند، بلکه برای هر رویهٔ ریمان نیز نتیجهٔ زیر را به دست می‌دهد.

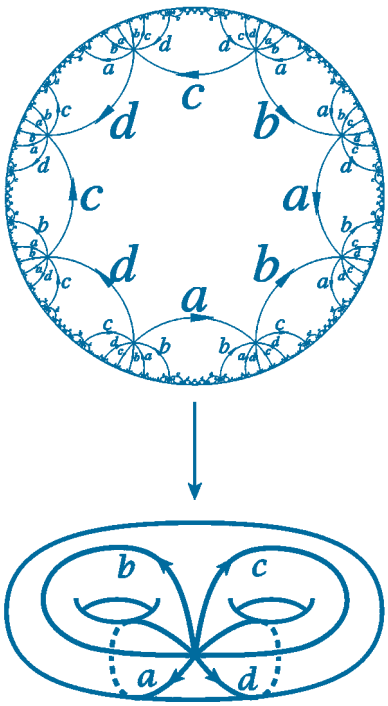
نتیجهٔ ۶: هر رویهٔ ریمان همبند، هم‌ارز است با:

- کرهٔ ریمان $\mathbb{S}^۲$.
- $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{C}/\mathbb{Z} = \mathbb{C}\backslash\{۰\}$ یا $\mathbb{C}/M$ که در آن M یک مشبکه است.
- خارج‌قسمت $\mathbb{H}/\Gamma$ که در آن $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(۲,\mathbb{R})$ یک زیرگروه گسسته است، که روی $\mathbb{H}$ به صورت آزاد عمل می‌کند.

ساختارهای مختلط روی چنبره

حال به مطالعهٔ ساختارهای مختلط روی چنبره می‌پردازیم و تلاش می‌کنیم تا تمام رده‌های هم‌ارزی رویه‌های ریمان با گونای یک را بیابیم.

رویهٔ ریمان با گونای یک را در نظر بگیرید و آن را $\mathbb{T}$ بنامید. با توجه به اینکه $\mathbb{T}$ از نظر توپولوژیک یک چنبره است، بنابراین پوشش جهانی $\mathbb{T}$، صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ است. اما قضیهٔ یکنواخت‌سازی تضمین می‌کند که فضای پوشش جهانی $\mathbb{T}$، هم‌ارز صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ باشد. بنابراین $\mathbb{T}$ از عمل گروهی گسسته مانند M از خودریختی‌های $\mathbb{C}$ حاصل می‌شود که به صورت آزاد روی آن



عمل می‌کند. اما از طرفی اگر M این‌گونه باشد، آنگاه M یکی از گروه‌های زیر است:

۱) $M = \{۰\}$.

۲) M شامل همهٔ انتقال‌هایی است به صورت

$$z \longmapsto z + n\omega, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

که در آن ω یک عدد مختلط ثابت ناصفر است.

۳) M شامل همهٔ انتقال‌هایی است به صورت

$$z \longmapsto z + n_۱\omega_۱ + n_۲\omega_۲, \qquad n_۱, n_۲ \in \mathbb{Z},$$

که در آن $\omega_۱$ و $\omega_۲$ دو عدد مختلطِ $\mathbb{R}$ـمستقل خطی هستند.

مشاهدهٔ این امر ساده است، زیرا تمام خودریختی‌های $\mathbb{C}$ نگاشت‌هایی به صورت $az + b$ هستند. اگر $a \neq ۱$، آنگاه این نگاشت نقطهٔ ثابتی خواهد داشت، که با فرض عمل آزاد M روی $\mathbb{C}$ در تناقض است. بنابراین $a = ۱$ و لذا خودریختی $\mathbb{C}$ که نقطهٔ ثابتی نداشته باشد، نگاشتی به صورت $z + b$ است. حال فرض کنید که Δ مدار مبدأ تحت M باشد. در این صورت Δ یک زیرگروه جمعی $\mathbb{C}$ است و M شامل تمام انتقال‌هایی به صورت زیر است:

$$\{z \longmapsto z + b : b \in \Delta\}.$$

فرض کنید V کوچکترین زیرفضای خطی‌ای باشد که Δ را در بر دارد. اگر بعد V روی $\mathbb{R}$ برابر صفر، یک یا دو باشد، به ترتیب با حالت‌های ۱، ۲ و یا ۳ مواجه خواهیم بود.

از آنجا که گروه بنیادی $\mathbb{T}$ یکریخت با $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ است، اگر $\mathbb{T}$ یک رویهٔ ریمان با گونای یک باشد، آنگاه $\mathbb{T}$ هم‌ارز است با $\mathbb{C}/M$ که در آن

$$M=\{n_1\omega_1+n_2\omega_2 : n_1,n_2\in\mathbb{Z}\},\qquad \frac{w_2}{w_1}\notin\mathbb{R}.$$

به عبارت دیگر، مطالعهٔ رویه‌های ریمان با گونای یک به مطالعهٔ مشبکه‌های M در $\mathbb{C}$ مربوط می‌شود.

روشن است که اگر نقاط z و $z+n_1\omega_1+n_2\omega_2$ را در $\mathbb{C}$ یکی بگیریم، آنگاه M چنبرهٔ $\mathbb{T}=\mathbb{T}_M$ را به دست می‌دهد. اگر (ω'_1,ω'_2) پایهٔ دیگری برای همان مشبکهٔ M باشد (که توسط ω_1 و ω_2 تعریف شده است) آنگاه تغییر پایه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{pmatrix}\omega'_2\\ \omega'_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}).$$

با توجه به مطلب فوق و پس از اندکی محاسبه، قضیهٔ زیر به دست می‌آید.

قضیهٔ ۷: پایهٔ (ω_1,ω_2) برای M وجود دارد به طوری که اگر $\tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}$، آنگاه داریم

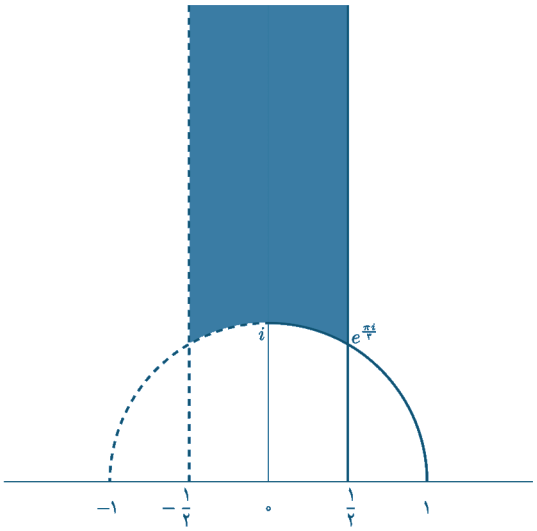
۱. $Im\ \tau>0$،

۲. $-\frac{1}{2}<Re\ \tau\leqslant\frac{1}{2}$،

۳. $|\tau|\geqslant 1$،

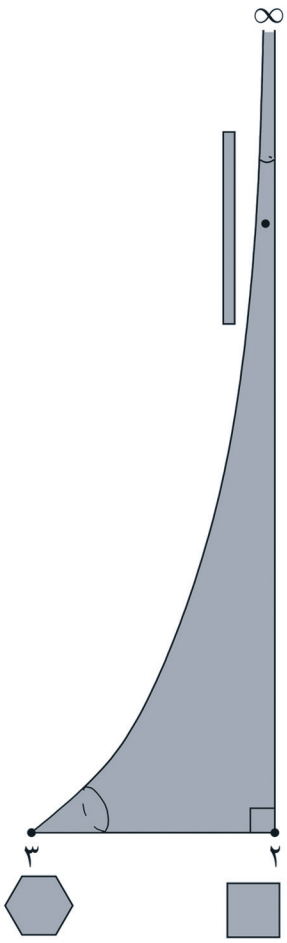
۴. $Re\ \tau\geqslant 0$ اگر $|\tau|=1$.

τ به صورت یکتا توسط شرایط فوق تعیین می‌شود و تعداد چنین پایه‌هایی برای مشبکهٔ داده‌شدهٔ M برابر است با ۲، ۴ یا ۶. ناحیهٔ توصیف‌شده توسط شرایط فوق را $\mathcal{F}$ می‌نامیم.



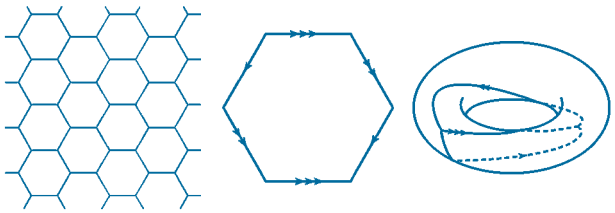
اینکه در حالت کلی دو پایه با شرایط قضیهٔ ۷ برای M وجود دارد روشن است، زیرا می‌توان (ω_1,ω_2) را با $(-\omega_1,-\omega_2)$ تعویض کرد. اگر $\tau=i$، آنگاه ۴ پایه به دست می‌آید، زیرا می‌توانیم (ω_1,ω_2) را با $(i\omega_1,i\omega_2)$ نیز تعویض کنیم. در نهایت اگر $\tau=e^{\frac{\pi i}{3}}$، ۶ پایه خواهیم داشت زیرا می‌توانیم (ω_1,ω_2) را با $(\tau\omega_1,\tau\omega_2)$ (و بنابراین با $(\tau^2\omega_1,\tau^2\omega_2)$) تعویض کنیم.

روشن است که مشبکهٔ M نه تنها چنبرهٔ $\mathbb{T}_M$ را به صورت توپولوژیک توصیف می‌کند، بلکه ساختار مختلط روی آن را نیز مشخص می‌کند. به علاوه توجه کنید که اگر دو مشبکه توسط ایزومتری‌ها و تجانس‌های $\mathbb{R}^2$ به یکدیگر تبدیل شوند، آنگاه چنبره‌هایی که توسط آنها توصیف می‌شوند، به عنوان رویهٔ ریمان هم‌ارز هستند. از طرف دیگر به کمک ایزومتری‌ها و تجانس‌های $\mathbb{R}^2$ همواره می‌توان پایهٔ M را به گونه‌ای تغییر داد که $\omega_1=1$ و $\omega_2=\tau$ که در آن $\mathrm{Im}\ \tau>0$. بنابراین اگر M مشبکه‌ای با پایهٔ (ω_1,ω_2) باشد می‌توانیم آن را به مشبکهٔ $(1,\tau)$ با $\tau\in\mathbb{H}$ تبدیل کنیم که رویهٔ ریمان هم‌ارز با $\mathbb{T}_M$ را تولید می‌کند. از این پس اگر چنین کنیم رویهٔ ریمان به دست آمده را با $\mathbb{T}_\tau$ نمایش خواهیم داد.



به این ترتیب، میان نقاط $\mathbb{H}$ و $(\mathbb{T}_M,(\omega_1,\omega_2))$ تناظری دوسویی برقرار است. البته ممکن است که τهای متفاوت در $\mathbb{H}$ رویه‌های ریمان هم‌ارزی را

به دست دهند، اما با توجه به قضیهٔ ۷ اگر توجه خود را به $\mathcal{F}$ محدود کنیم، آنگاه این آزادی عمل از بین می‌رود. $\mathcal{F}$ چندضلعی اصلی حاصل از عمل گروه $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ روی $\mathbb{H}$ است. توجه کنید که اگر $\mathbb{H}$ را به ساختار هذلولوی مجهز کنیم، عناصر $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ به صورت ایزومتری روی $\mathbb{H}$ عمل می‌کنند. در این حالت $\tau = i$ و $\tau = e^{\frac{\pi i}{3}}$ نقاط ثابتی برای این عمل خواهند بود که به ترتیب از مرتبهٔ ۲ و ۳ هستند. این مرتبه‌ها متناظر تقارن‌های مرتبهٔ ۲ و ۳ در مربع و شش‌ضلعی هستند. همچنین توجه کنید که $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ روی $\mathcal{F}$ نقطهٔ ثابت دیگری ندارد. خارج قسمت عمل $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ روی $\mathbb{H}$ را $\mathcal{M}$ می‌نامیم. توجه کنید که اگر در مرز $\mathcal{F}$، دو نیم‌خط (خط و خط‌چین) و ۲ کمان (خط و خط‌چین که i نقطهٔ مشترک آنهاست) را با توجه به عمل $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ یکی کنیم، $\mathcal{M}$ به دست می‌آید. در این حالت $\mathcal{M}$ یک خمینهٔ هموار نیست، بلکه یک اربیفلد (orbifold) است.



مطالب فوق نشان می‌دهند که هر رویهٔ ریمان با گونای یک، با یک τ در $\mathcal{M}$ مشخص می‌شود و بر عکس، به وضوح هر $\tau \in \mathcal{M}$ یک رویهٔ ریمان با گونای یک را مشخص می‌کند. آنچه که باقی می‌ماند، بررسی این مطلب است که دو τ و τ' متمایز در $\mathcal{M}$، رویه‌های ریمان متفاوتی را مشخص می‌کنند. به منظور رسیدن به این هدف و در ادامه، اندکی نگاشت‌های $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ را مطالعه می‌کنیم.

از آن جا که $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$، گروه تبدیل‌های پوششی $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}$ برابر $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ است که توسط نگاشت‌های $z \longmapsto z+\omega_i$ برای $i = 1, 2$ تولید می‌شود. بنابراین گروه بنیادی $\mathbb{T}_{\mathcal{M}}$ به صورت متعارف با مشبکهٔ $\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ یکریخت است. همچنین توجه کنید که $\pi_1(\mathbb{T})$ را بدون انتخاب نقطهٔ پایه نمایش می‌دهیم زیرا $\pi_1(\mathbb{T})$ آبلی است و در نتیجه نگاشت‌های مزدوج در گروه بنیادی، همانی هستند.

قضیهٔ ۸: گروه رده‌های هوموتوپی هومئومورفیسم‌های جهت‌نگه‌دار چنبره با $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ یکریخت است.

اثبات فرض کنید $\mathbb{T} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$ و گروه رده‌های هوموتوپی هومئومورفیسم‌های جهت‌نگه‌دار $\mathbb{T}$ را $\mathrm{Mod}(\mathbb{T})$ بنامید. هر هومئومورفیسم $\mathbb{T}$ مانند f نگاشت $f_* : \pi_1(\mathbb{T}) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T})$ را القاء می‌کند. از آن جا که f وارون‌پذیر است، f_* یک خودریختی $\pi_1(\mathbb{T})$ است. بنابراین داریم:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}) \approx GL(2,\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto f_*.$$

از اینکه عدد تقاطع جبری در $\mathbb{T}$ متناظر دترمینان است و هومئومورفیسم‌های جهت‌نگه‌دار، عدد تقاطع جبری را حفظ می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که f_* عضوی از $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ است.

همچنین اینکه هر عضو $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ هومئومورفیسم خطی جهت‌نگه‌داری روی $\mathbb{R}^2$ القا می‌کند که به هومئومورفیسم خطی‌ای روی $\mathbb{T}$ فرستاده می‌شود، نشان می‌دهد که $f \longmapsto f_*$ پوشاست.

برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم که اگر $f_1, f_2 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ و $f_{1*} = f_{2*}$، آنگاه f_1 هوموتوپ f_2 است. برای این کار، فرض کنید که $\tilde{f}_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (به ازای $i = 1, 2$) تفریع‌یافتهٔ f_i باشد. در این صورت داریم:

$$\tilde{f}_1(z+n_1+n_2 i) - \tilde{f}_2(z+n_1+n_2 i) = \tilde{f}_1(z) - \tilde{f}_2(z),$$
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

اگر تعریف کنیم:

$$\tilde{F}(z,s) = (1-s)\tilde{f}_1(z) + s\tilde{f}_2(z),$$

آنگاه

$$\tilde{F}(z+n_1+n_2 i, s) = \tilde{f}_1(z+n_1+n_2 i) + s\left(\tilde{f}_2(z) - \tilde{f}_1(z)\right).$$

در نتیجه $\tilde{F}(\cdot,s)$ نگاشت $F(\cdot,s) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ را القاء می‌کند که هوموتوپی مورد نظر بین f_1 و f_2 را به دست می‌دهد. □

اکنون ابزار لازم برای اثبات قضیهٔ زیر را در اختیار داریم.

قضیهٔ ۹: با نمادگذاری‌های فوق، اگر $\tau, \tau' \in \mathcal{M}$ و $\tau \neq \tau'$، آنگاه $\mathbb{T}_\tau$ و $\mathbb{T}_{\tau'}$ متفاوت‌اند.

اثبات نخست نشان می‌دهیم که اگر $f : \mathbb{T}_\tau \longrightarrow \mathbb{T}_{\tau'}$ یک هومئومورفیسم همدیس باشد، آنگاه $f_*(\tau) = \tau'$. در اینجا f_* عضوی است از $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ و عمل $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ روی $\mathbb{H}$ به وسیلهٔ تبدیل موبیوس زیر تعریف شده است:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto f(z) = \frac{az-b}{-cz+d}.$$

برای این کار و با توجه به اینکه $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ توسط

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

تولید می‌شود، کافی است تا ادعای فوق را در مورد P و Q اثبات کنیم.

می‌توان ۱ و τ را به عنوان عناصر پایهٔ $\pi_1(\mathbb{T}_\tau)$ در نظر گرفت. در این صورت P یک پیچ دن (Dehn twist) خواهد بود. اگر یک پیچ دن حول

خم بستهٔ سادهٔ α را با D_α نمایش دهیم، آنگاه P پیچ دن D_1^{-1} است. به همین ترتیب Q عبارت است از $(D_1 D_\tau D_1)^{-1}$. از طرفی داریم

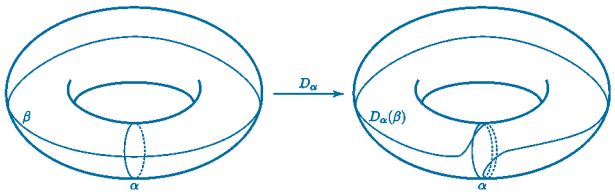
$$(D_1^{-1})(1) \sim 1, \qquad (D_1^{-1})(\tau) \sim \tau - 1,$$

که در آن مقصود از $\sim$، ایزوتوپی است. به عبارت دیگر D_1^{-1}، ۱ را ثابت نگه می‌دارد و τ را به $\tau - 1$ می‌برد. اما این، به آن معناست که D_1^{-1} روی $\mathbb{H}$ توسط تبدیل موبیوس $z \longmapsto z - 1$ عمل می‌کند. به صورت مشابه، $(D_1 D_\tau D_1)^{-1}$، $(1, \tau)$ را به $(-\tau, 1)$ تصویر می‌کند که اگر آن را به صورت استاندارد نمایش دهیم، $(1, \frac{1}{\tau})$ خواهد بود. این مطلب نشان می‌دهد که $(D_1 D_\tau D_1)^{-1}$ روی $\mathbb{H}$ به صورت تبدیل موبیوس $z \longmapsto -\frac{1}{z}$ عمل می‌کند. به این ترتیب اثبات ادعای $f_*(\tau) = \tau'$ کامل می‌شود.

حال اثبات قضیهٔ ۸ روشن است. فرض کنید $\tau, \tau' \in \mathcal{M}$، $\tau \neq \tau'$، و $f : \mathbb{T}_\tau \longrightarrow \mathbb{T}_{\tau'}$ یک هومئومورفیسم همدیس باشد، در این صورت τ' از راه عمل یکی از عناصر $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ روی τ به دست آمده است. اما این مطلب با

$$\mathcal{M} = \mathbb{H}/\mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{H}/\mathrm{SL}\,(2, \mathbb{Z})$$

در تناقض است. □



تصویری که به‌کمک قضیه‌های ۷ و ۹ به دست می‌آید نه تنها مجموعه‌ای به دست می‌دهد که نقاط آن در تناظرند با ساختارهای مختلط روی چنبره، بلکه می‌توان این مجموعه را به صورت یک فضای پرمایش در نظر گرفت.

تعریف. فضای پرمایش $\mathcal{M}(\mathbb{T})$، فضای رده‌های هم‌ارزی چنبره‌های مجهز به ساختار همدیس است. دو چنبره را هم‌ارز در نظر می‌گیریم هرگاه نگاشت دوسویی همدیسی بین آنها وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید $\{\mathbb{T}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از رده‌های هم‌ارزی باشد. در این صورت $\mathbb{T}^n$ را به $\mathbb{T}$ همگرا گوییم، هرگاه پایه‌های (ω_1^n, ω_2^n) برای $\mathbb{T}^n$ و پایهٔ (ω_1, ω_2) برای $\mathbb{T}$ موجود باشند به طوری که $\frac{\omega_2^n}{\omega_1^n}$ به $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ همگرا شود.

تعریف. فضای تایشمولر (Teichmüller space)، $\mathcal{T}(\mathbb{T})$، فضای رده‌های هم‌ارزی زوج‌های $(\mathbb{T}, (\omega_1, \omega_2))$ است که در آن $\mathbb{T}$ یک چنبره و (ω_1, ω_2) پایه‌ای برای $\mathbb{T}$ است (مشبکهٔ M، $\mathbb{T}$ را تعریف می‌کند). $(\mathbb{T}, (\omega_1, \omega_2))$ و $(\mathbb{T}', (\omega_1', \omega_2'))$ را هم‌ارز گوییم، اگر نگاشت دوسویی همدیس

$$f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$$

با

$$f_*(\omega_i) = \omega_i'$$

وجود داشته باشد. توجه کنید که (ω_1, ω_2) و (ω_1', ω_2') به ترتیب با پایه‌های $\pi_1(\mathbb{T})$ و $\pi_1(\mathbb{T}')$ یکی شده‌اند. همچنین گوییم $(\mathbb{T}^n, (\omega_1^n, \omega_2^n))$ به $(\mathbb{T}, (\omega_1, \omega_2))$ همگراست، هرگاه $\frac{\omega_2^n}{\omega_1^n}$ به $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ همگرا شود.

تعریف. گروه رده‌های نگاشت (mapping class group) $\mathrm{Mod}(\mathbb{T})$، گروه رده‌های هوموتوپی هومئومورفیسم‌های جهت‌نگه‌دار چنبره است.

قضیهٔ زیر، خلاصهٔ مطالب این قسمت است که ارتباط میان تعاریف فوق را نیز توضیح می‌دهد.

قضیهٔ ۱۰:

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathcal{M}, \qquad \mathcal{T}(\mathbb{T}) = \mathbb{H}, \qquad \mathrm{Mod}(\mathbb{T}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}),$$
$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathcal{T}(\mathbb{T})/\mathrm{Mod}(\mathcal{T}).$$

۳. ساختارهای مختلط روی رویه‌هایِ با گونای بزرگتر از یک

در این قسمت، به اختصار، تعمیم تعاریف قسمت قبل را در حالتی که گونای رویه بزرگتر از یک باشد، مرور می‌کنیم. فرض کنید S یک رویهٔ بسته و جهت‌پذیر با گونای $g \geqslant 2$ باشد. اگر S به یک ساختار همدیس مانند c مجهز شده باشد، آنگاه رویهٔ ریمان حاصل را با (S, c) نمایش می‌دهیم. با توجه به نتیجهٔ ۶، پوشش جهانی (S, c) نیم‌صفحهٔ بالایی $\mathbb{H}$ است و به این ترتیب (S, c) به یک متریک هذلولوی مجهز می‌شود. این متریک هذلولوی به صورت یکتا توسط ساختار همدیس c مشخص می‌شود، زیرا هر نگاشت همدیس بین متریک‌های هذلولوی، یک ایزومتری است: هر نگاشتی از این دست به یک خودریختی همدیس از نیم‌صفحهٔ بالایی $\mathbb{H}$ ترفیع می‌یابد که یک ایزومتری متریک هذلولوی $\mathbb{H}$ خواهد بود. در نتیجه متریک‌های هذلولویِ به صورت همدیس معادل، در حد یک ایزومتری متفاوت‌اند و نمی‌توان بین آنها از نظر متریکی تفاوتی قائل شد. بنابراین به ازای هر $g \geqslant 2$ ثابت، یک تناظر دوسویی طبیعی بین ساختارهای همدیس و متریک‌های هذلولوی روی S وجود دارد. از این رو، ساختار همدیس روی S را با متریک هذلولی متناظر با آن یکی می‌گیریم و هر دو را با نمادی یکسان (یعنی c) نمایش می‌دهیم.

تعریف. فضای پرمایش $\mathcal{M}_g$ مجموعهٔ ساختارهای همدیس (یا متریک‌های هذلولوی) روی رویهٔ داده شدهٔ S است که در آن (S, c_1) و (S, c_2) را هم‌ارز می‌گیریم، هرگاه دیفئومورفیسم همدیس (یا ایزومتری) بین آنها موجود باشد. توجه کنید که g گونای S است.

البته توپولوژی فضای $\mathcal{M}_g$ پیچیده است. به عنوان مثال، $\mathcal{M}_g$ یک خمینهٔ هموار نیست و در ساختارهای همدیسی که خودریختی همدیس می‌پذیرند، تکینگی‌هایی رخ می‌دهد. به همین دلیل، تایشمولر یکسانی ضعیف‌تری را (نسبت به یکسانی فوق که در تعریف فضای پرمایش ظاهر شد)، معرفی می‌کند. به این ترتیب که (S, c_1) و (S, c_2) را با یکدیگر هم‌ارز نمی‌گیریم، اگر دیفئومورفیسم همدیس بین آنها، هوموتوپ همانی نباشد. راه دیگری برای بیان این هم‌ارزی ضعیف‌تر آن است که سه‌تایی‌های (S, c, f) را در نظر بگیریم که در آنها، c ساختار همدیس روی S و $f : S \longrightarrow S$ یک دیفئومورفیسم است. دو سه‌تایی (S, c_i, f_i) به ازای $i = 1, 2$ را هم‌ارز می‌گیریم اگر نگاشت همدیس $k : (S, c_1) \longrightarrow (S, c_2)$ موجود باشد به طوری که نمودار زیر در حد هوموتوپی جابه‌جا شود. به عبارت دیگر $f_2 \circ f_1^{-1}$ و k هوموتوپ باشند.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ (S, c_1) \arrow[rr, "k"'] & & (S, c_2) \end{tikzcd}$$

تعریف. رده‌های هم‌ارزی سه‌تایی‌های (S, c, f) را تحت رابطهٔ هم‌ارزی فوق، فضای تایشمولر می‌نامیم و با $\mathcal{T}_g$ (g گونای S است) نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعاریف فوق، فضای پرمایش $\mathcal{M}_g$ فضای خارج قسمتی $\mathcal{T}_g$ است که به وسیلهٔ فراموش کردن دیفئومورفیسم‌های f به دست می‌آید. دیفئومورفیسم f مشخص می‌کند که چگونه (S, c) به صورت توپولوژیک با یک مدل ثابت S یکی شده است. نگاشت $h : (S, c_1, f_1) \longrightarrow (S, c_2, f_2)$ هوموتوپ همانی است، اگر و تنها اگر h هوموتوپ $f_2 \circ f_1^{-1}$ باشد. در نتیجه هوموتوپ بودن k با $f_2 \circ f_1^{-1}$ معادل با هوموتوپ بودن k با همانی است. بنابراین فضای تایشمولر، رده‌های هم‌ارزی سه‌تایی‌های (S, c, f) است که از طریق هم‌ارزی توسط دیفئومورفیسم‌های همدیس که هوموتوپ همانی هستند، به دست می‌آید.

تعریف. فرض کنید $D^+(S)$ گروه دیفئومورفیسم‌های جهت‌نگه‌دار S باشد. این گروه را به توپولوژی فشرده‌ـباز مجهز می‌کنیم. در این صورت، گروه رده‌های نگاشت S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Mod}_g = \pi_0(D^+(S))$$

که در آن g گونای S است.

به ازای $g \geqslant 2$ نیز قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۱۰ برقرار است که ارتباط میان فضای پرمایش، فضای تایشمولر و گروه رده‌های نگاشت S را توضیح می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱:

$$\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g / \mathrm{Mod}_g.$$

۴. نگرش جبری

همان طورکه در مقدمه مشاهده کردیم، رویهٔ C_3 که از فشرده‌سازی صفرهای معادلهٔ $f_3(x, y) = y^2 - x^3 - ax^2 - b_2 - c$ به دست آمد دارای گونای یک است. به همین صورت می‌توان معادلات پیچیده‌تری برحسب x و y را در نظر گرفت و با استفاده از روش‌های بیان‌شده در مقدمه، گونای هر کدام از این رویه‌ها را به دست آورد.

این ایده را می‌توان تعمیم داد و صفرهای مشترک تعدادی چندجمله‌ای همگن برحسب متغیرهای $x_0, \cdots, x_n$ را در داخل $\mathbb{P}^n$ در نظر گرفت. اگر این معادلات به نحوی باشند که صفرهای مشترک آنها یک خمینهٔ یک‌بعدی مختلط باشد، به این خمینه، یک خم جبری می‌گوییم. برای g و n طبیعی می‌توان چنین تعریف کرد:

تعریف. فضای پرمایش خم‌های گونای g با n نقطه، فضای جبری $\mathcal{M}_{g,n}$ است که

۱) نقاط $\mathcal{M}_{g,n}$ در تناظر یک به یک با ردهٔ خم‌های جبری هموار با گونای g هستند که روی هر خم، n نقطه متمایز $p_1, \cdots, p_n$ را نیز تثبیت کرده‌ایم.

۲) اگر معادلات خم C را به طور پیوسته تغییر دهیم و به خانوادهٔ C_t از خم‌های جبری برسیم، آنگاه نقاط متناظر با خم‌های C_t یک مسیر پیوسته روی $\mathcal{M}_{g,n}$ تشکیل می‌دهند. به همین صورت، اگر مکان نقاط را روی C تغییر دهیم، نقاط متناظر این خم‌ها روی $\mathcal{M}_{g,n}$ به طور پیوسته تغییر می‌کنند.

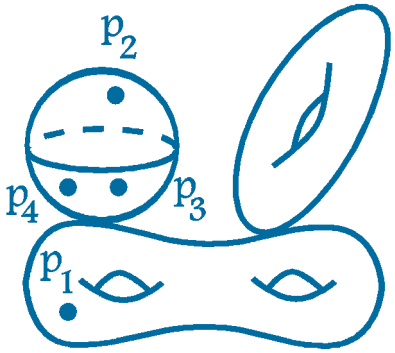
فضای $\mathcal{M}_{g,n}$ و هندسهٔ آن مشابه با حالت گراسمانین که در مطالعهٔ کلاف‌های برداری کاربرد داشت در مطالعهٔ خانواده‌های خم‌های جبری کاربرد دارد. یکی از ابزارهای رایج برای این مطالعات استفاده از گروه‌های کوهومولوژی و گروه‌های چاو (Chow) است که در حالت فشرده قابل محاسبه‌اند. برای این منظور فشرده‌سازی دلین‌ـمامفورد (Deligne-Mumford) را در نظر می‌گیریم.

در فشرده‌سازی $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ از $\mathcal{M}_{g,n}$، خم‌های غیرهمواری را که دارای تکینگی رأسی (مشابه با $xy = 0$) هستند نیز در نظر می‌گیریم. شکل صفحهٔ بعد مثالی از چنین خمی است:

برای نقطهٔ $P = (C, p_1, \cdots, p_n)$ از $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ فضای پادمماس در نقطهٔ kام را در نظر می‌گیریم. اگر این فضا را برای تمام نقاط $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ در نظر بگیرید، یک کلاف خطی مختلط روی $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ به دست می‌دهد، که آن را $\mathbb{L}_k$ می‌نامیم.

تعریف. به ازای k، $1 \leq k \leq n$:

$$\psi_k := c_1(\mathbb{L}_k).$$



رده‌های کوهومولوژی ψ_k و نظریهٔ تقاطع مرتبط با آنها در حدس ویتن ـ قضیهٔ کانتسویچ، ظاهر می‌شوند. برای بیان صورت این قضیه به نمادهای زیر نیازمندیم:

نمادگذاری:

$$< \tau_{a_1} \tau_{a_2} \cdots \tau_{a_n} > = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \cdots \psi_n^{a_n}$$

$$F(t_0, t_1, \cdots) := \sum_S \prod_{i=0}^{w} \frac{t_i^{s_i}}{s_i!} < \tau_0^{s_0} \tau_1^{s_1} \tau_2^{s_2} \cdots \tau_w^{s_w} > .$$

$$S = (s_0, s_1, \cdots, s_w)$$

قضیهٔ کانتسویچ: تابع مولد F برای هر i در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} F = \frac{1}{2i+1} \left\{ \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \frac{\partial}{\partial t_0} F \cdot \frac{\partial^3}{\partial t_0^3} F + 2 \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} F \cdot \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} F + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \frac{\partial^4}{\partial t_0^4} F \right\}.$$

مراجعی برای مطالعهٔ بیشتر

1. **E. Arbarello**, **M. Cornalba**, and **P. Griffiths**, *Geometry of Algebraic Curves*, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
2. **A. Fletcher** and **V. Markovic**, *Quasiconformal Maps and Teichmüller Theory*, Oxford University Press, New York, 2006.
3. **F. Gardiner** and **N. Lakic**, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, AMS, Mathematical Surveys and Monographs, 1999.
4. **Y. Imayoshi** and **M. Taniguchi**, *An Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, Tokyo, 1992.

طرح‌ها