کار مریم میرزاخانی*

این مطلب ترجمهٔ گزارشی اجمالی از کارهای ریاضی مهم مریم میرزاخانی است که اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی (IMU) همزمان با برگزاری کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان (تابستان ۲۰۱۴، سئول) در وبگاه خود قرار داده و سپس در رسانه‌ها و نشریات گوناگون، تمام یا قسمتی از آن نقل شده است. قسمت مراجع این گزارش شامل ۶ مقالهٔ مهم میرزاخانی است که ما فهرست آنها را در صفحهٔ قبل (ستون دوم) آورده‌ایم.

مریم میرزاخانی دستاوردهای چشمگیر و فوق‌العاده اصیلی در هندسه و سیستمهای دینامیکی داشته است. نتایج تحقیقات او در رویه‌های ریمان و فضاهای پرمایش[۱] آنها چندین شاخهٔ ریاضیات ــ هندسهٔ هذلولوی، آنالیز مختلط، توپولوژی، و دینامیک ــ را به هم پیوند می‌زند و بر همهٔ آنها تأثیر می‌گذارد. او به خاطر کارهای اولیه‌اش در هندسهٔ هذلولوی شهرت زیادی به دست آورد و جدیدترین کارش پیشرفت عمده‌ای در نظریهٔ سیستمهای دینامیکی به شمار می‌آید.

نام رویه‌های ریمان از نام برنهارد ریمان ریاضیدان قرن نوزدهم گرفته شده است. او نخستین ریاضیدانی بود که به اهمیت رویه‌های مجرد ــ درمقابل رویه‌های «ملموس» در فضای احاطه‌کنندهٔ خاص، مانند سطح کره در فضای اقلیدسی سه بعدی ــ پی برد. ریاضیدانها بیش از یک قرن قبل براساس دیدگاه ریمان دریافتند که چنین رویه‌هایی را می‌توان به طور توپولوژیک رده‌بندی کرد یعنی با دقتی در حد تغییر شکل (deformation) به وسیلهٔ تنها یک عدد که تعداد دستگیره(handle)های رویه است. این عدد را گونای (genus) رویه می‌نامند. مثلاً گونای کره صفر است و رویهٔ فنجان قهوه دارای گونای یک است. به شرط اینکه از جزئیات دقیق شکل هندسی صرف نظر شود، به ازای هر عدد صحیح مثبت g دقیقاً یک رویه با گونای g وجود دارد.

رویه وقتی تبدیل به رویهٔ ریمان می‌شود که یک ساختار هندسی اضافی به آن داده شود. چنین ساختاری را می‌توان یک ساختار مختلط در نظر گرفت که امکان استفاده از آنالیز مختلط را در مورد رویه‌های مجرد فراهم می‌سازد. چون هر عدد مختلط شامل دو پارامتر حقیقی است، رویه که دارای دو بعد در اعداد حقیقی است فقط یک بعد مختلط دارد و گاهی خم مختلط نامیده می‌شود. نکتهٔ زیر، نظریهٔ رویه‌های ریمان را به هندسهٔ جبری ربط می‌دهد: هر خم مختلط یک خم جبری است، یعنی خم مختلط هر چند به طور مجرد تعریف می‌شود، قابل تحقق در یک فضای احاطه‌کنندهٔ استاندارد است که در آن فضا، مجموعهٔ ریشه‌های یک چند جمله‌ای است که به طور مناسب انتخاب شده باشد. به این ترتیب، هرچند رویهٔ ریمان به طور پیشینی یک شئ آنالیزی است که به زبان آنالیز مختلط بر رویه‌های مجرد تعریف می‌شود، این رویه را به زبان جبری برحسب معادلات چندجمله‌ای هم می‌توان توصیف کرد.

راه دیگر تعریف یک رویهٔ ریمان استفاده از هندسه‌ای است که اندازه‌گیری زاویه، طول، و مساحت را امکان‌پذیر کند. مهمترین هندسه از این نوع، هندسهٔ هذلولوی است یعنی نمونهٔ اصلی هندسهٔ نااقلیدسی که بویویی، گاوس، و لباچفسکی آن را کشف کردند. هم‌ارزی ساختارهای جبری مختلط و هذلولوی بر رویه‌ها جزو مبانی نظریهٔ رویه‌های ریمان است.

تحقیقات اولیهٔ میرزاخانی معطوف به ژئودزیکهای بستهٔ یک رویهٔ هذلولوی بوده است. این ژئودزیکها خمهای بسته‌ای هستند که طولشان را نمی‌توان با تغییر شکل آنها کم کرد. قضیه‌ای کلاسیک، متعلق به ۵۰ سال قبل، راه دقیقی برای براورد تعداد ژئودزیکهای بسته‌ای که طولشان کمتر از یک کران مفروض L است به دست می‌دهد. تعداد ژئودزیک‌های بسته به طور نمایی با مقدار L افزایش می‌یابد. به طور مشخص، این تعداد برای Lهای بزرگ به e^L/L میل می‌کند. این قضیه به «قضیهٔ اعداد اول برای ژئودزیکها» معروف است زیرا دقیقاً مشابه با «قضیهٔ اعداد اول» برای عددهای صحیح است که تعداد عددهای اولِ کوچکتر از یک عدد مفروض را براورد می‌کند (در آن مورد، تعداد عددهای اول کوچکتر از e^L به ازای Lهای بزرگ به طور مجانبی برابر e^L/L است).

*) *The work of Maryam Myrzakhani*, Notices **61**(2014) 1079-1081.

۱) برای این اصطلاح به ستون اول این ویژه‌نامه نگاه کنید.

میرزاخانی در «قضیهٔ اعداد اول برای ژئودزیکها» به تحقیق در حالتی پرداخت که فقط ژئودزیکهای بستهٔ ساده در نظر گرفته شوند یعنی ژئودزیکهایی که خودشان را قطع نمی‌کنند. در این مورد، وضع بسیار متفاوت است: رشد تعداد ژئودزیکهای با طول حداکثر L دیگر رشد نمایی برحسب L نیست بلکه از مرتبهٔ L^{6g-6} است که در آن g گونا می‌باشد. میرزاخانی نشان داد که در واقع این تعداد به ازای Lهای بزرگ مجانب با $c \cdot L^{6g-6}$ است که ثابت c بستگی به ساختار هذلولوی دارد.

گرچه این حکم دربارهٔ یک ساختار هذلولوی خاص (هرچند دلخواه) بر یک رویه است ولی میرزاخانی در اثبات آن همهٔ این گونه ساختارها را با هم در نظر گرفت. ساختارهای مختلط بر رویه‌ای با گونای g یک فضای پیوسته، یا ناگسسته، تشکیل می‌دهند چون تغییرشکلهای پیوسته دارند. هر چند رویهٔ توپولوژیک زمینه یکسان می‌ماند، شکل هندسی آن طی تغییرشکل عوض می‌شود. ریمان می‌دانست که این تغییرشکل‌ها به $6g-6$ پارامتر یا «پیمانه» (modulus) بستگی دارند یعنی «فضای پرمایش [پارامتری‌سازی]» (moduli space) رویه‌های ریمانِ گونای g دارای بعد $6g-6$ است. ولی از اینجا چیزی دربارهٔ ساختار کلی فضای پرمایش که به غایت پیچیده و هنوز بسیار اسرارآمیز است، به دست نمی‌آید. فضای پرمایش، خود دارای هندسهٔ پیچیده‌ای است و رهیافتهای گوناگون به رویه‌های ریمان منجر به دیدگاه‌های متفاوت دربارهٔ هندسه و ساختار این فضا می‌شود. مثلاً، در نظر گرفتنِ رویه‌های ریمان به عنوان خمهای جبری به این نتیجه‌گیری می‌انجامد که فضای پرمایش، خود یک شیئ جبری موسوم به واریتهٔ جبری است.

در اثباتی که میرزاخانی از حکم شمارشی خود عرضه کرده، ساختار دیگری روی فضای پرمایش مطرح می‌شود، ساختاری «همتافته» (symplectic) که به خصوص اندازه‌گیری حجمها (ولی نه طولها) را امکان‌پذیر می‌کند. او با تعمیم کار مک‌شین (G. McShane) پیوندی بین محاسبات حجم روی فضای پرمایش و مسئلهٔ شمارش ژئودزیکهای بستهٔ روی یک رویهٔ تنها برقرار می‌کند؛ حجمهای معینی در فضای پرمایش را محاسبه می‌کند و حکم شمارشی دربارهٔ ژئودزیکهای بستهٔ ساده را از این محاسبه نتیجه می‌گیرد.

این دیدگاه، میرزاخانی را به سوی بصیرت‌های تازه‌ای دربارهٔ فضای پرمایش هدایت کرد و یکی از نتایج آن، اثبات غیرمنتظره‌ای از یک حدس ادوارد ویتن (برندهٔ مدال فیلدز در ۱۹۹۰ و از پیشروان نظریهٔ ریسمان) بود. فضای پرمایش مکانهای هندسی خاصی در درون خود دارد که متناظر با رویه‌های ریمان، با ویژگیهای خاص، هستند و این مکانها ممکن است با یکدیگر تقاطع داشته باشند؛ در مورد مکانهایی که به طور مناسب انتخاب شده باشند، این تقاطعها تعابیر فیزیکی دارند. ویتن براساس شهود فیزیکی و محاسباتی که چندان دقیق نبود، حدسی دربارهٔ این تقاطعها مطرح کرد که نظر ریاضیدانها به آن جلب شد. ماکسیم کانتسویچ (برندهٔ مدال فیلدز در ۱۹۹۸) حدس ویتن را در ۱۹۹۲ از راه مستقیم ثابت کرد و پانزده سال بعد، میرزاخانی، حدس عمیق ویتن دربارهٔ فضای پرمایش را به مسائل شمارشی ژئودزیکهای رویه‌ها پیوند زد.

در سالهای اخیر، میرزاخانی به کاوش در جنبه‌های دیگری از هندسهٔ فضای پرمایش پرداخته است. چنانکه قبلاً گفته شد، فضای پرمایش رویه‌های ریمان با گونای g خود یک شیئ هندسی $6g-6$بعدی است که یک ساختار مختلط و در واقع جبری دارد. به علاوه، فضای پرمایش دارای متریکی است که مطالعهٔ ژئودزیکهای آن طبیعی به نظر می‌رسد. میرزاخانی و همکارانش قضیه‌ای مشابه «قضیهٔ اعداد اول برای ژئودزیکهای بسته» ثابت کرده‌اند که در آن، ژئودزیکهای بسته نه روی یک رویهٔ تنها بلکه در فضای پرمایش شمارش می‌شوند. او همچنین به مطالعهٔ بعضی از سیستمهای دینامیکی (یعنی سیستمهایی که با زمان تحول می‌یابند) روی فضای پرمایش پرداخته و به خصوص ثابت کرده است که سیستمی به نام «شارش زلزله» که ویلیام ترستن (برندهٔ مدال فیلدز در ۱۹۸۲) آن را مطرح کرده، آشوبناک است.

به‌تازگی، میرزاخانی با همکاری الکس اسکین (Alex Eskin) و امیرمحمدی به موفقیت مهمی در شناخت سیستم دینامیکی دیگری روی فضای پرمایش دست یافته است که به رفتار ژئودزیکها در فضای پرمایش ربط دارد. ژئودزیکهای نابسته در فضای پرمایش بسیار نامنظم به نظر می‌رسند و به دست آوردن شناختی از ساختار و نحوهٔ تغییر آنها وقتی دچار مختصری اختلال شوند دشوار است. ولی میرزاخانی و همکارانش ثابت کرده‌اند که ژئودزیکهای مختلط و بستارهای آنها در فضای پرمایش در واقع به طور عجیبی منظم‌اند و فرکتالی یا نامنظم نیستند. معلوم می‌شود که ژئودزیکهای مختلط هر چند اشیایی متعالی‌اند که به زبان آنالیز و هندسهٔ دیفرانسیل تعریف می‌شوند،بستارهای آنها اشیایی جبری‌اند که برحسب چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شوند و بنابراین ویژگیهای معینی از لحاظ صلبیت (rigidity) دارند.

این کار تحسین پژوهشگرانی را که در این زمینه تحقیق می‌کنند برانگیخته و آنها را به بسط این نتیجهٔ جدید و کشف نتایج تازه ترغیب کرده است. یک دلیلش این است که قضیه‌ای که میرزاخانی و اسکین ثابت کرده‌اند مشابه قضیهٔ مشهور مارتینا راتنر (Martina Ratner) در دههٔ ۱۹۹۰ است. راتنر صلب بودن را برای سیستمهای دینامیکی روی فضاهای همگن ثابت کرد ــ یعنی فضاهایی که در آنها همسایگی هر نقطه درست مانند همسایگی هر نقطهٔ دیگری به نظر می‌رسد. ولی فضای پرمایش کاملا ناهمگن است: هر بخش آن کاملاً متفاوت با هر بخش دیگرش می‌باشد. کشف این نکته که صلبیت در فضاهای همگن بازتابی در دنیای ناهمگن فضای پرمایش دارد بسیار حیرت‌انگیز است.

با توجه به پیچیدگی و ناهمگنی فضای پرمایش، پژوهش مستقیم دربارهٔ این فضا در نظر بسیاری از ریاضیدانان غیرممکن می‌نموده است، اما نه در نظر میرزاخانی. او شهود هندسی نیرومندی دارد که به کمک آن می‌تواند مستقیماً به هندسهٔ فضای پرمایش بپردازد. میرزاخانی، مسلط بر مجموعهٔ بسیار متنوعی از تکنیکهای ریاضی و فرهنگ مباحث گوناگون ریاضی، مجسم‌کنندهٔ ترکیب نادری از توانایی تکنیکی در سطح عالی، بلندپروازی جسورانه و بینش بسیار گسترده است. فضای پرمایش دنیایی است که نواحی کشف نشدهٔ بسیار دارد و مریم میرزاخانی بدون شک یکی از رهبران اکتشافات در این دنیا خواهد بود. ■