اخبار

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

سال دوم، شماره سوم، پاییز ۱۳۷۲، شماره مسلسل ۷

در این شماره

از دیوفانتوس تا وایلز: اثبات قضیهٔ آخر فرما

سعید ذاکری
مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

فرض کنید p، a، b، و c اعدادی صحیح باشند و $p > 2$. اگر $a^p + b^p = c^p$، آنگاه $abc = 0$.

اندرو وایلز (Andrew Wiles) از دانشگاه پرینستون، حکم بالا موسوم به «قضیهٔ آخر فرما» (**ق‌اف**)را در پایان سه جلسه سخنرانی خود در ۲ تیر ۱۳۷۲ در انستیتو آیزاک نیوتن درکیمبریج انگلستان ثابت کرد. عنوان سلسله سخنرانیهای او «خمهای بیضوی، فرمهای پیمانه‌ای، و نمایشهای گالوا» بود. این عنوان موجب شده بود که شرکت‌کنندگان در این مورد که سخنرانیها به چه نتیجه‌ای خواهد انجامید تردید داشته باشند. برخی شایعات نیز چند روزی دهان به دهان گشته بود. با شروع سخنرانیهای وایلز، هیجان حضار به اوج رسید. در سخنرانی سوم بیش از ۶۰ ریاضیدان شرکت کردند که بسیاری از آنها دوربین خود را برای ثبت این واقعه به همراه آورده بودند.

در سخنرانی سوم، وایلز اعلام کرد که حدس تانی‌یاما را برای ردهٔ وسیعی از خمهای بیضوی روی $\mathbb{Q}$، موسوم به خمهای بیضوی *شبه پایدار*، ثابت کرده است. اکثر حضار در جلسه می‌دانستند که **ق‌اف** از این مطلب نتیجه می‌شود. اگرچه **ق‌اف** به دلیل قدمت و شهرت فراوانش، برای آماتورها و نیز ریاضیدانان حرفه‌ای جذاب و فریبنده است، حدس تانی‌یاما در نهایت اهمیت بسیار بیشتری برای ریاضیات نوین دارد. از قرار معلوم، اثبات وایلز به ۲۰۰ صفحهٔ دستنوشت می‌رسد که هنوز در اختیار عموم قرار نگرفته است، اما بسیاری از متخصصانی که بخشهایی از اثبات را خوانده‌اند می‌گویند که اثبات حتی پس از بررسیهای دقیق و موشکافانه هم احتمالاً درست خواهد بود.*

پیدایش حدس تانی‌یاما به اواسط دههٔ ۱۹۵۰ باز می‌گردد. شکل اولیهٔ این حدس بعدها توسط ویل و شیمورا تکامل یافت و به همین دلیل این حدس گاهی «حدس شیمورا ـ تانی‌یاما ـ ویل» نامیده می‌شود. به بیان ساده این حدس می‌گوید که هر خم بیضوی روی $\mathbb{Q}$ *پیمانه‌ای* است. خوشبختانه برای توصیف این مفهوم راه آسانی به زبان آنالیز مختلط وجود دارد: یک خم بیضوی روی $\mathbb{Q}$ عبارت است از خمی جبری در $\mathbb{C}P^2$ مانند $Y^2 = AX^3 + BX^2 + CX + D$، که در آن A، B، C، و D اعدادی گویاهستند، و عبارت درجهٔ سوم بر حسب X ریشهٔ مکرر ندارد. به هر خم بیضوی روی $\mathbb{Q}$ یک خم حسابی می‌گویند. از آنالیز مختلط کلاسیک می‌دانیم که هر خم بیضوی را می‌توان با یک چنبره (رویهٔ با $g = 1$) «پارامتریزه» کرد، بدین معنی که به ازای هر خم بیضوی E، شبکه‌ای چون Λ در $\mathbb{C}$ و تابعی تحلیلی و غیرثابت از $\mathbb{C}/\Lambda$ به E وجود دارد. این پارامتری‌سازی، *اقلیدسی* خوانده می‌شود. لکن برای مقاصد نظریهٔ اعداد، لازم است پارامتری‌سازی‌های هذلولوی را بررسی کنیم؛ در اینجا خارج‌قسمت‌هایی چون $\mathbf{H}/\Gamma$ مورد نظرند که در آن $\mathbf{H}$ نیمصفحهٔ پوانکاره و Γ زیرگروهی از $SL(2,\mathbb{Z})$ است. به ازای هر عدد صحیح N، زیرگروه $\Gamma(N)$ از $SL(2,\mathbb{Z})$ را که مرکب است از همهٔ ماتریسهایی که

با $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ به هنگ N همنهشت‌اند، در نظر می‌گیریم. گروههای $\Gamma(N)$ روی $\mathbf{H}$ عمل می‌کنند و همگی شاخص متناهی دارند. هر زیرگروه $SL(۲,\mathbb{Z})$ را که شامل یکی از $\Gamma(N)$ها باشد یک زیرگروه همنهشتی می‌نامیم.

اکنون حدس تانی‌یاما را می‌توان چنین بیان کرد: «به ازای هر خم حسابی E، یک زیرگروه همنهشتی Γ و تابع تحلیلی غیرثابتی از $\mathbf{H}/\Gamma$ به E وجود دارد». به بیان غیردقیق، این حدس می‌گوید که خمهای حسابی را می‌توان با توابع پیمانه‌ای پارامتریزه کرد، بدین معنی که توابعی مرومورف چون f و g روی $\mathbf{H}$ وجود دارند که تحت عمل Γ ناوردا هستند و به ازای هر z در $\mathbf{H}$، $f(z)^۲ = Ag(z)^۳ + Bg(z)^۲ + Cg(z) + D$. بدین قرار، چنین خمهایی را پیمانه‌ای می‌نامیم.

ارتباط میان حدس تانی‌یاما و **ق‌اف** را فری (Frey) در سال ۱۹۸۵ مطرح کرد. او راهی برای اثبات این مطلب نشان داد که هر جواب غیربدیهی $a^p + b^p = c^p$ برای **ق‌اف** منجر به یک خم حسابی شبه‌پایدار می‌شود که در حدس تانی‌یاما صدق نمی‌کند. خم پیشنهادی او به‌سادگی عبارت بود از $Y^۲ = X(X - a^p)(X + b^p)$. طرح اثبات فری برای اینکه این خم پیمانه‌ای نیست، در سال ۱۹۸۶ توسط ریبت (Ribet) کامل شد. ریبت این کار را با اثبات دو حدس مهم از سر (Serre) در مورد نمایشهای پیمانه‌ای گالوا به انجام رسانید و بدین ترتیب نشان داد که درستی حدس تانی‌یاما **ق‌اف** را نتیجه می‌دهد. اثبات او جامعهٔ ریاضی را قانع کرد که **ق‌اف** باید درست باشد. همگان انتظار داشتند که حدس تانی‌یاما روزی به یک قضیه مبدل شود، اما تحقق این مطلب در نظر متخصصان بسیار مشکل می‌نمود.

وایلز بی‌اعتنا به این عقیدهٔ پذیرفته شده، به مجرد آنکه دریافت **ق‌اف** از حدس تانی‌یاما نتیجه می‌شود، کار اثبات آن را آغاز کرد. به نتیجه رساندن این کار ۷ سال به درازا کشید. او بدین منظور از نتایج و روشهای افراد بسیاری استفاده کرد که از میان آنها می‌توان از فالتینگز (Faltings)، میزر (Mazur)، فلچ (Flach)، و کولیواگین (Kolyvagin) نام برد. وایلز نشان داد که هر خم حسابی شبه‌پایدار لزوماً پیمانه‌ای است. شبه‌پایدار بودنِ یک خم حسابی را می‌توان به این طریق تعریف کرد: مبیّنِ هر خم حسابی عبارت است از حاصل‌ضرب مربعات تفاضل دو به دوی ریشه‌های آن. هرگاه عدد اول l مبیّن را عاد کند، دست‌کم دو تا از ریشه‌ها با یکدیگر به هنگ l همنهشت خواهند بود. خم مورد نظر *شبه پایدار* نامیده‌می‌شود هرگاه به ازای هر عدد اول l که مبیّن را عاد کند، دقیقاً دو ریشه با یکدیگر به هنگ l همنهشت باشند. خم فری به وضوح شبه‌پایدار است، زیرا مبیّن آن عبارت است از $(abc)^{۲p}$، و ریشه‌های آن ۰، a^p، و $-b^p$ اند، و بی کاستن از کلّیت می‌توان a و b را نسبت به هم اول فرض کرد. بنابراین، وایلز عملاً ثابت کرد که خم فری که بر مبنای یک جواب غیربدیهی **ق‌اف** ساخته می‌شود پیمانه‌ای است، و این خلاف نتیجه‌ای بود که ریبت قبلاً ثابت کرده بود. این تناقض، درستی **ق‌اف** را نشان داد.

اثبات وایلز از حدس تانی‌یاما نقطهٔ عطفی در ریاضیات معاصر به‌شمار می‌آید و این نه فقط به خاطر حل مسأله‌ای بسیار معروف و تاریخی است، اهمیت فراتر کار وایلز در این نهفته است که قدرت ابزارهای کاملاً مجرد را در مطالعهٔ مسائلِ بسیار ملموس به‌نمایش می‌گذارد. علی‌رغم این دستاورد بزرگ، خود وایلز معتقد است که «همهٔ متخصصان نظریهٔ اعداد که عمیقاً جذب حرفهٔ خود شده‌اند، از اثبات **ق‌اف** اندکی ناراحت‌اند». او می‌افزاید: «بسیاری از ما به **ق‌اف** به چشم رؤیایی دست‌نیافتنی می‌نگریستیم که ما را به خود مشغول می‌کرد، اما اکنون واقعاً احساس می‌کنیم که چیزی را از دست داده‌ایم». درکنار تمامی اینها، اثبات وایلز به‌گونه‌ای حقانیت فرما را نیز ثابت کرد: به نظر نمی‌رسد دستنوشتهٔ وایلز در حاشیهٔ کتاب دیوفانتوس جا بگیرد!

* بنا بر آخرین خبر رسیده از طریق پست الکترونیک، ظاهراً خود وایلز در بخشی از اثبات که به دستگاههای اویلری کولیواگین مربوط می‌شود، اشکالاتی یافته و اکنون در صدد برطرف کردن آنهاست. بگفتهٔ جان کوتس (Coats)، استاد وایلز، رفع این اشکالات ممکن است تا دو سال به درازا بینجامد.

تصحیح نمودار

درمقالهٔ «ارزیابی تحقیقات علمی ایران در سطح جهان: فیزیک و ریاضیات» در شمارهٔ قبل *اخبار* (شمارهٔ مسلسل ۶)، صص۴-۵، نمودار مقابل باید جایگزین نمودار ۴ (ص ۵) شود. البته این نمودار در نمودار فشردهٔ انتهای همان صفحه به‌صورت ادغام شده موجود است (که متأسفانه ستون نشان‌دهندهٔ آن، یعنی ستون ▥، برای سال ۱۹۸۴، به‌جای ۷ مقاله ۹ مقاله را نمایش می‌دهد). بدین‌ترتیب جملهٔ توصیفی مربوط به آن که در ص ۴، ستون دوم، سطر ۷ از پایین، آمده است باید به جای بیانِ «ثبات»، مشاهدهٔ «گرایشِ رو به افزایش» تعداد مقالات ریاضی را تأکید کند.

شاپور اعتماد