آشنایی با معادلات دیفرانسیل جزئی از دیدگاه نظریهٔ نیم‌گروه‌ها

حسنعلی امامی راد

دکتر **حسنعلی امامی‌راد** همکار جدید پژوهشگاه است که فعالیت خود را به عنوان پژوهشگر ارشد در دو زمینهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی و ریاضیات زیستی در پژوهشکدهٔ ریاضی آغاز کرده است.

حسنعلی امامی‌راد پس از اخذ دیپلم از دبیرستان البرز در سال ۱۳۴۰ به فرانسه رفت، دورهٔ کارشناسی و کارشناسی ارشد را در دانشگاه استراسبورگ گذراند، و سپس دکتری سیکل سه را از دانشگاه پاریس شمال (پاریس ۱۳) گرفت و در سال ۱۳۵۲ به ایران بازگشت. تا سال ۱۳۵۶ در دانشگاه تهران تدریس کرد و سپس تا ۱۳۵۹ در سازمان انرژی اتمی ایران مشغول کار بود. در عزیمت دوباره به فرانسه، در سال ۱۳۶۳ دکتری دولتی را از دانشگاه پاریس شمال گرفت و حین تحصیل دکتری و بعداً تا سال ۶۶ در این دانشگاه و چند دانشگاه دیگر به تدریس پرداخت؛ در این سال، استاد دانشگاه پواتیه شد و تا زمان بازنشستگی (در سال گذشته) در این سمت باقی ماند. رشتهٔ تخصصی دکتر امامی راد، معادلات دیفرانسیل جزئی و نظریهٔ نیم‌گروه‌هاست. وی بیش از ۵۰ مقالهٔ تحقیقی در این زمینه نوشته است.

معادلات دیفرانسیل جزئی از مهمترین مباحث ریاضی است که کاربردهایش حیطهٔ وسیعی را از فیزیک و مهندسی و اقتصاد تا محیط زیست در بر می‌گیرد. امید است آغاز همکاری دکتر امامی راد، طلیعهٔ فعالیت گسترده‌تر پژوهشگاه در این زمینه باشد.
مطلبی که در اینجا می‌خوانید مقاله‌ای توصیفی در زمینهٔ علائق پژوهشی دکتر امامی راد است.

معادلات دیفرانسیل زمینه‌ای است در ریاضیات که از رویکردهای فیزیکی نشأت می‌گیرد. به طور مشخص، در فیزیک و یا بهتر بگوییم در مقولهٔ مکانیک محیط‌های پیوسته قوانینی وجود دارند که منجر به این معادلات می‌شوند، نظیر قانون بقای جرم، انرژی و یا تکانه (مقدار حرکت). به‌علاوه قوانین فیزیکی دیگری نیز به این معادلات می‌انجامند، نظیر قانون حرکت نیوتون که منجر به معادلات جنبشی می‌شود و یا قانون فوریه که منجر به معادلهٔ گرما می‌گردد.

توابعی را که در این معادلات صدق می‌کنند جواب معادله خوانند و این جواب معمولاً تابعی است از یک متغیر x در فضای nبعدی و یا متعلق به زیرمجموعه‌ای از فضای nبعدی. معادلات دیفرانسیل جزئی را می‌توان از لحاظ جبری و یا هندسی طبقه‌بندی کرد. از نظر جبری، مرتبهٔ یک معادله حائز اهمیت است و آن عبارت است از بالاترین مرتبهٔ مشتق جزئی که در معادله وجود دارد. به طور مثال معادلهٔ

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=0$$

یک معادلهٔ مرتبهٔ ۲ در فضای $\mathbb{R}^2$ است. از نظر هندسی، این معادلات به‌صورت بیضوی، سهموی و هذلولوی تقسیم‌بندی شده‌اند.

یکی از مهمترین مباحثی که در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی مطرح می‌شود مبحث معادلات تحولی است که در آنها جواب وابسته به زمان است. واضح است که همواره تحول یک دستگاه فیزیکی وابسته به زمان است و این وابستگی با شرایط اولیهٔ دستگاه ارتباط دارد. یک دستگاه تحولی می‌تواند متشکل از یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی یا جزئی همراه با شرایط اولیه و گاهی شرایط مرزی باشد. به‌طور کلی این دستگاه را می‌توان چنین تشریح کرد: گیریم $u(t)$ بیانگر کیفیت یک سیستم فیزیکی در لحظهٔ

t باشد. فرض کنیم که میزان تغییر $u(t)$ نسبت به زمان توسط یک عملگر A نشان داده شود و همچنین در زمان $t=0$، $f=u(0)$ داده شده باشد. در این صورت، دستگاه تحولی عبارت است از

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A[u(t)], & t \geq 0 \\ u(0) = f \in X \end{cases} \qquad (1)$$

برای اینکه این دستگاه خوش تعریف باشد باید عبارت

$$\left[\frac{du}{dt}\right](t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، اولاً $u(t+h)-u(t)$ دارای مفهوم ریاضی باشد یعنی فضای X که $u(t)$ در آن تعریف می‌شود دارای ساختار فضای برداری باشد و ثانیاً مفهوم $\lim$ در این فضا معنی‌دار باشد، به عبارت دیگر X باید یک فضای توپولوژیک باشد. در اکثر موارد X را یک فضای باناخ اختیار می‌کنند.

مثال زیر می‌تواند آنچه را در بالا گفته شد روشن سازد.

مثال. فرض کنیم یک جسم نسبتاً گرم به شکل Ω را در آب سرد با دمای صفر درجه غوطه‌ور می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\partial\Omega$ سطح خارجی Ω دارای شکلی هموار باشد. چنانچه عملگر لاپلاسین در فضای سه‌بعدی را با $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ نمایش دهیم، تغییر دمای این جسم توسط معادلهٔ گرما با داده‌های اولیهٔ

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w(t,x) = \Delta w(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ w(0,x) = f(x), & \\ w(t,x) = 0, & \text{اگر } x = (x_1,x_2,x_3) \in \partial\Omega \end{cases}$$

مشخص می‌شود که در آن جواب $w(t,x)$ دمای جسم در نقطهٔ $x=(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$ در لحظهٔ t است. چنانچه $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ و $X = C(\bar{\Omega})$ فضای باناخ توابع پیوسته با نرم

$$||f|| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$$

باشد، به ازای هر $f \in X$ دستگاه (H) دارای یک جواب منحصربه‌فرد $w(t,x)$ است که اگر این جواب را با $u(t) = w(t,.)$ به توان تابعی از x نمایش دهیم، می‌توان مشتق این تابع یعنی $\frac{du}{dt}$ را با مشتق جزئی $\frac{\partial w}{\partial t}(t,.)$ منطبق گرفت و آن عبارت است از حد $h^{-1}[w(t+h,.) - w(t,.)]$ در فضای X هرگاه $h \to 0$.

حال عملگر A را تعریف می‌کنیم. برای معرفی A اول به تعریف میدانی که A روی آن تعریف می‌شود می‌پردازیم. این میدان را با $D(A)$ نمایش می‌دهیم و آن عبارت است از مجموعهٔ همهٔ توابعی در X چون v که دوبار مشتق‌پذیر باشند و $\Delta v \in X$ و به علاوه $v(x) = 0$ هرگاه $x \in \partial\Omega$. در این صورت، فرض می‌کنیم $Av = \Delta v$ به ازای هر $v \in D(A)$، و می‌توان دستگاه (H) را به صورت دستگاه (۱) نوشت که در آن شرط مرزی (H) در $D(A)$ مستتر است.

دستگاه (۱) را مسئلهٔ مجردِ کُشی (Cauchy abstract problem) می‌خوانند و عملگر خطی A را بی‌کران (unbounded) می‌نامند زیرا روی تمام فضای X تعریف نشده است.

یکی از نکات مهم، خوش‌طرحی (well-posedness) این مسئله است.

گوییم مسئلهٔ (۱) خوش‌طرح است هرگاه دارای جوابی یکتا باشد که به طور پیوسته وابسته به دادهٔ اولیه $f \in X$ باشد. ابتدا این وابستگی را به صورت فیزیکی مطرح می‌کنیم. فرض می‌کنیم جواب معادلهٔ (۱) از یک آزمایش فیزیکی به دست آید و مانند هر آزمایش فیزیکی صحیح هرگاه آن را با شرایط اولیه متشابهی تکرار کنیم جواب‌های مشابهی با تفاوت جزئی حاصل شود و این همان خوش‌طرح بودن مسئله است.

این مقوله را به زبان ریاضی به صورت زیر می‌توان مطرح کرد. گیریم مسئلهٔ (۱) خوش‌طرح باشد و نگاشت $T(t)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که $T(t)$ به هر جواب $u(s)$ جواب در لحظهٔ $t+s$ یعنی $u(t+s)$ را می‌نگارد. با فرض اینکه عملگر A وابسته به زمان نباشد، عملگر $T(t)$ نیز وابسته به s نخواهد بود و معنای فیزیکی آن این است که مکانیسم آزمایشی مستقل از زمان است. پس می‌توان نوشت $u(t+s) = T(t)u(s)$ و چون $u(s) = T(s)u(0) = T(s)f$ برای هر $f \in X$ داریم $T(t+s)f = u(t+s) = T(t)T(s)f$ و از آن نتیجه می‌گیریم که

الف) به ازای هر $f \in X$، $T(0)f = f$.

ب) به ازای هر $f \in X$ و هر $t,s \geq 0$، داریم

$$T(t+s)f = T(t)T(s)f.$$

به استناد این دو اصل، نگاشت $T(t)$ را یک نیم‌گروه از عملگرها خوانند و اگر عملگر A خطی باشد $T(t)$ نیز خطی است و این خاصیت همراه با خوش‌طرح بودن $T(t)$ نشان می‌دهد که یک مقدار ثابت C وابسته به زمان t وجود دارد به طوری که

$$||T(t)f - T(t)g|| = ||T(t)(f-g)|| \leq C||f-g||.$$

اگر جبر همهٔ عملگرهای خطی و پیوسته از X در X را با $L(X)$ نشان دهیم، $T(t) \in L(X)$ و یا به عبارت دیگر

ج) به ازای هر $t \geq 0$،

$$||T(t)|| = \mathrm{Sup}\{||T(t)f|| : f \in X \text{ و } ||f|| \leq 1\} < \infty$$

و بالاخره، نیم گروه $T(t)$ را قویاً پیوسته خوانند هرگاه نگاشت

$$t \in [0,\infty) \longrightarrow T(t)f$$

به ازای هر $f \in X$ پیوسته باشد. به عبارت دیگر

د) $T(t)f \in C(\mathbb{R}_+, X)$.

مؤلف کتاب [۱] نیم‌گروه قویاً پیوستهٔ $T(t)$ را (C_0) نیم‌گروه خوانده و این واژه امروزه کاملاً متداول شده است.

هرگاه یک (C_0)نیم‌گروه در رابطهٔ $\|T(t)\| \le 1$ صدق کند آن را انقباض خوانند و معمولاً آنچه را در مورد (C_0)نیم‌گروه‌های انقباضی گفته می‌شود می‌توان در مورد هر (C_0) نیم‌گروهی به اثبات رساند.

هرگاه $T(t)$ یک (C_0)نیم‌گروه باشد مولد آن را می‌توان به‌وسیلهٔ

$$Af = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} \tag{۲}$$

تعریف کرد که در آن $f \in D(A)$ و $D(A)$ مجموعهٔ همهٔ عناصری از X است که به‌ازای آنها حد در فرمول (۲) وجود داشته باشد. به‌طور کلی فرمول (۲) نشان می‌دهد، که یک نیم‌گروه $T(t)$ به طور صوری به شکل $T(t) = e^{tA}$ نوشته می‌شود زیرا که $(d/dt)T(t)|_{t=0} = A$، و به‌علاوه جواب مسئلهٔ (۱)، اگر $f \in D(A)$، همان $u(t) = T(t)f$ خواهد بود. در اینجا دو مسئله مطرح می‌شود که می‌توان آنها را به صورت دو قضیه بیان کرد.

قضیهٔ اول (قضیهٔ خوش‌طرحی). مسئلهٔ (۱) با مقدار اولیهٔ $f \in D(A)$ خوش‌طرح است هرگاه عملگر A مولد یک نیم‌گروه قویاًپیوستهٔ $T(t)$ باشد و در این صورت جواب مسئله، $u(t) = T(t)$ خواهد بود.

مسئلهٔ دوم این است که بدانیم تحت چه شرایطی یک عملگر A مولد یک (C_0)نیم‌گروه است. برای اینکه این مسئله را روشن کنیم نگاهی به فرمول متعارف

$$\int_0^\infty e^{(-\lambda+a)t}dt = \frac{1}{\lambda - a}, \qquad \lambda > a \tag{۳}$$

می‌افکنیم. آیا می‌توان در این فرمول به جای a یک عملگر خطی بی‌کران A قرار داد؟ جواب این سؤال مثبت است هرگاه به ازای هر $f \in X$ انتگرال $\int_0^\infty e^{\lambda t}T(t)fdt$ کراندار باشد. مثلاً اگر $T(t)$ یک (C_0)نیم‌گروه انقباضی باشد، به ازای هر $f \in X$ و هر $\lambda > 0$ داریم:

$$\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)fdt\| \le \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)f\|dt \le \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|f\|dt = \|f\|/\lambda$$

و هرگاه طرف دوم فرمول (۳) را به صورت عملگر $(\lambda I - A)^{-1}$ که در آن I عملگر همانی است، نشان دهیم، نتیجه می‌شود که به ازای هر $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda} \tag{۴}$$

و این فرمول دقیقاً آن چیزی است که به عنوان قضیهٔ هیله یوشیدا (Hille Yosida Theorem) معروف شده است. این قضیه توسط هیل در کتابش [۱] به اثبات رسید و در حالت کلی هنگامی که $T(t)$ صرفاً انقباضی نباشد در کتاب [۲] مطرح شده است. این قضیه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ دوم (قضیهٔ تولید) عملگر خطی A مولد یک نیم‌گروه انقباضی است اگر و تنها اگر میدان A در فضای X چگال باشد و به علاوه در فرمول (۴) صدق کند.

یکی از کاربردهای مهم نظریهٔ نیم‌گروه‌ها تقریب یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی می‌باشد. هرگاه بتوان یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی را به صورت یک دستگاه مجرد (۱) نوشت و اطمینان حاصل کرد که در آن عملگر A یک (C_0) نیم‌گروه $T(t)$ است آنگاه می‌توان از فرمول تقریب

$$T(t)f = \lim_{n\to\infty}(I - \frac{t}{n}A)^{-n}f \tag{۵}$$

استفاده کرده و نیم‌گروه $T(t)$ را محاسبه نمود. این فرمول از فرمول متعارف

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{x}{n})^{-n}$$

نتیجه شده است و برای اثبات آن می‌توان از قضیهٔ چرنوف که در مقالهٔ [۳] آمده است استفاده کرد و آن عبارت است از

قضیهٔ سوم (قضیهٔ چرنوف) هرگاه در فضای باناخ X، $\{V(t)\}_{t\ge 0}$ خانواده‌ای از عملگرهای انقباضی باشند که در شرایط زیر صدق کنند

الف) $V(0) = I$

ب) یک مجموعهٔ D وجود دارد به طوری که عملگر $V'(0)\big|_D$ دارای بستاری است که مولد یک (C_0)نیم‌گروه انقباضی $T(t)$ می‌باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\|V(\frac{t}{n})^n f - T(t)f\| = 0 \tag{۶}$$

و این همگرایی روی هر بازهٔ فشردهٔ $\mathbb{R}_+$ یکنواخت است.

اگر از این قضیه استفاده کرده و $V(t)$ را برابر $(I - tA)^{-1}$ اختیار کنیم، چون عملگر A مولد (C_0)نیم‌گروه انقباضی $T(t)$ است، به ازای $t = \frac{1}{\lambda}$ از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌گیریم که از

$$\|V(t)\| = \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \le 1.$$

پس خانواده $\{V(t)\}$ از عملگرهای انقباضی تشکیل یافته و به ازای هر $f \in D(A)$، داریم $Af = V'(0)f$؛ لذا از فرمول (۶)، فرمول (۵) نتیجه می‌شود.

فرمول (۵) را می‌توان به نیم‌گروه‌های غیرخطی نیز تعمیم داد. گیریم B عملگری نه لزوماً خطی باشد که روی فضای باناخ X چنان تعریف شده که به ازای هر f در حوزهٔ تعریف B، $Bf \in X$. برای چنین عملگرهایی می‌توان نیم نرم $\|B\|_{Lip}$ را بدین‌سان تعریف کرد:

$$\|B\|_{Lip} = \sup\{\|Bf - Bg\|/\|f - g\|\}$$

سوپرمم به ازای همهٔ عناصر $f,g \in X$ به طوری که $f \neq g$، در نظر گرفته می‌شود. واضح است که اگر B خطی باشد این نیم‌نرم همان نرم عملگر B خواهد بود.

حال بازگردیم به مسئلهٔ (۱) و فرض کنیم عملگر A در آنجا غیرخطی باشد. در دستگاه (۱) به جای معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{1}{\varepsilon}[u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t-\varepsilon)] = A[u_\varepsilon(t)], \qquad t \geq 0$$

شرط اولیهٔ $u_\varepsilon(s) = f$ به ازای هر $-\varepsilon \leq s \leq 0$ را قرار می‌دهیم. در این صورت، جواب مسئله

$$u_\varepsilon(t) = (I - \varepsilon A)^{-1}[u_\varepsilon(t-\varepsilon)]$$

خواهد بود و چنانچه ε را برابر $\frac{1}{n}$ انتخاب کنیم

$$u_\varepsilon(t) = (I - \frac{t}{n}A)^{-n} f$$

حاصل می‌شود که ما را مجبور به اعمال شرایط زیر می‌کند

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{به ازای هر } \alpha > 0\text{، بُرد عملگر } (I-\alpha A) \text{ تمام فضای} \\ X \text{ باشد و } ||I-\alpha A)^{-1}||_{Lip} \leq 1 \end{array} \right. \qquad (۷)$$

در صورتی که عملگر A خطی باشد، با قرار دادن $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ فرمول (۴) را بازمی‌یابیم. به طور مثال، اگر عملگر A تابعی تک‌مقداری روی $\mathbb{R}$ را فرا گیرد باید A پیوسته باشد ولی این امکان وجود دارد که A پیوسته نباشد و فرض می‌کنیم که A در نقطهٔ x دارای یک جهش باشد. در این صورت، عملگر A دیگر تک مقداری نخواهد بود و می‌توان فرض کرد که $A(x)$ عبارت است از بازهٔ بستهٔ $[A(x-0), A(x+0)]$، و گزارهٔ (۷) را به صورت دیگری عرضه کرد و آن استفاده از نمودار عملگر A است به عبارت دیگر A را با نمودارش در فضای $X \times X$ یکی گرفته و به جای (۷) می‌نویسیم: به ازای $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(I - \alpha A)^{-1} = \{(g,f) \in X \times X : (f, \frac{1}{\alpha}(f-g)) \in A\}$$

نمودار یک عملگر انقباضی باشد. این نشان می‌دهد که چندمقداری بودن یک عملگر A رابطهٔ مستقیم با بُرد این عملگر دارد و همچنین اگر عملگر A تک‌مقداری باشد و در نابرابری (۷) صدق کند ولی بُرد A در X فراگیر نباشد و فقط چگال باشد، آنگاه می‌توان بستار نمودار A را تعریف کرد و آن را با $\bar{A}$ نشان داد که در آن صورت ممکن است $\bar{A}$ چندمقداری باشد.

بنا به آنچه گفته شد، می‌توان نیم‌گروه قویاً پیوستهٔ انقباضی ولی غیرخطی $T(t)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

خانوادهٔ $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ به ازای هر $t \geq 0$ و $T(t) : X \to X$ دارای ویژگی‌های زیر است.

الف) به ازای هر $f \in X$، $T(0)f = f$.

ب) به ازای هر $t,s \geq 0$ و هر $f \in X$،

$$T(t)T(s)f = T(t+s)f$$

ج) به ازای هر $f \in X$،

$$t \longmapsto T(t)f,$$

در فاصلهٔ $[0,\infty)$ پیوسته است.

د) $||T(t)||_{Lip} \leq 1$.

قضیهٔ زیر را که در مقاله [۴] به اثبات رسیده است می‌توان تعمیمی از قضیهٔ سوم در حالت غیرخطی دانست.

قضیهٔ چهارم (قضیهٔ کراندال_لیگت) هرگاه عملگر A در رابطهٔ (۷) صدق کند و میدان تعریف آن چگال باشد حد

$$T(t)f = \lim_{n\to\infty} (I - \frac{t}{n}A)^{-n} f$$

وجود دارد و یک نیم‌گروه قویاً پیوسته انقباضی تعریف می‌کند.

این قضیه در بسیاری از معادلات غیرخطی سهموی و هذلولوی به کار برده شده که در بخش‌های بعدی این سری مقاله‌ها بدان‌ها می‌پردازیم.

منابع:

1. **E. Hille** and **R. S. Phillips**, *Functional Analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. Vol **31** Providence, R.I. 1957.
2 **K. Yosida**, *Functional Analysis*, Springer Verleg, Belim 1965.
3 **P. Chernoff**, *Note on product formules for operator semi-group*, J. Functional Analysis, **2** (1968), 238-242.
4 **M. G. Crandall** and **T. M. Liggett**, *Generation of semi-groups of nonlinear tromsformations on general Banach space*. Amer. J. Math. **93**(1971), 265-295.