حرف آخر دربارهٔ قضیهٔ آخر فرما

پیر فرما(۱۶۶۵-۱۶۰۱) ریاضیدان بزرگ فرانسوی در حاشیهٔ بخش ۸ کتاب II ای دیوفانتوس، زیر عنوان برای تجزیهٔ یک عدد مربع به دو عدد مربع دیگر، چنین نوشت:

"تجزیهٔ یک عدد مکعب به دو عدد مکعب دیگر، یا عددی از توان چهارم، یا در حالت کلی از هر توان به دو عدد از همان توان، بالاتر از توان دوم، غیر ممکن است، و من به یقین اثبات تحسین برانگیزی برای این مطلب پیدا کرده‌ام که در این حاشیهٔ تنگ نمی‌گنجد."

محتوای این حاشیهٔ معروف، همان حکمی است که به قضیهٔ آخر فرما شهرت یافته است. این، به زبان امروزی، یعنی اینکه معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای $n \geq 3$ در میان اعداد صحیح مثبت جواب ندارد. تلاش بسیاری از ریاضیدانان بزرگ برای اثبات یا رد این مطلب، در طول بیش از سه قرن راه به جایی نبرد، لکن این تلاش طولانی، خصوصاً در سالهای اخیر، خود موجب پیشرفتهایی عظیم در نظریهٔ اعداد و هندسهٔ جبری شده که نمونهٔ شاخص آن اثبات حدس موردل توسط گرد فالتینگز در اوایل دههٔ هشتاد است.

روز چهارشنبه ۲۳ ژوئن ۱۹۹۳ (۲ تیر ۱۳۷۲) رویداد غیرمنتظره‌ای درباب این مسئلهٔ حل نشدهٔ معروف به‌وقوع پیوست. در این روز پروفسور اندرو وایلز، که یک ریاضیدان ۴۰ سالهٔ انگلیسی‌تبار و استاد دانشگاه پرینستون امریکاست، اثباتی از حدس تانیاما ارائه کرد. پیش از آن ریاضیدانان دیگری نشان داده بودند که درستی این حدس، صحت قضیهٔ آخر فرما را نتیجه می‌دهد. وایلز این مطلب را در سخنرانی خود در انستیتو آیساک نیوتن کمبریج اعلام کرد.

پروفسور ریبت از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی از طرف وایلز به خبرنگاران چنین گفت: "دکتر وایلز به هر معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ در قضیهٔ فرما یک خم بیضوی نسبت می‌دهد. هرگاه این معادله دارای جواب باشد، خمی با شرایط ویژه به‌دست می‌آید. اما اثبات او نشان می‌دهد که چنین خم ویژه‌ای وجود ندارد." ریبت همچنین گفت: "۷ سال طول کشید تا وایلز مسئله را حل کند. او این نتیجه را در پایان سومین سخنرانی از مجموعهٔ سخنرانیهای خود که در روزهای دوشنبه ۲۱، سه‌شنبه ۲۲ و چهارشنبه ۲۳ ژوئن ارائه کرد، اعلام نمود. عنوان سخنرانی او *فرمهای پیمانه‌ای، خمهای بیضوی و نمایشهای گالوا* بود. او ادعا کرد که حالتی کلی از حدس تانیاما را ثابت کرده است. بعد در حالی که چانه‌اش را می‌خاراند، اضافه کرد که این مطلب نشان می‌دهد که قضیهٔ آخر فرما درست است." ریبت افزود: "همهٔ ۶۰ نفر حاضران در جلسه، از شنیدن این مطلب بهت‌زده شدند!"

قسمتی از خبر اثبات قضیهٔ آخر فرما که از طریق پست الکترونیک به *اخبار* رسید.

```
***********************************************************************

        Fermat's Last Theorem seems to be proven.

***********************************************************************

On Wednesday June 23,1993,Professor Andrew Wiles,a 40 year-old English
Mathematician who works at Princeton University, showed a proof for
Taniyama Conjecture,then he noted that, this means Fermat's Last Theorem
is true.
He was lecturing at "P-adic Galois Representations Iwasawa Theory and the
Tamagawa Numbers of Motives " in Cambridge,England.
```

سیستمهای دینامیکی، نظریهٔ اندازه، و برخالها از طریق نظریهٔ قلمرو

نظریهٔ قلمرو (Domain Theory) در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ در ارتباط با نظریهٔ معنی (semantics) برای مدل‌سازی زبانهای برنامه‌سازی توسط دینا اسکات (Dana Scott)منطقدان امریکایی و عده‌ای دیگر از منطقدانان و نظریه پردازان علوم کامپیوتر ارائه گردید.

جوهر اصلی نظریهٔ قلمرو، مفهوم ترتیب جزئی *اطلاعات* در معنی‌سازی است. ترتیبهای جزئی که در اینجا به کار می‌روند *کامل‌*اند، به این معنی که در آنها هر زنجیرهٔ شمارش‌پذیر صعودی دارای کوچکترین کران بالایی است. اسکات برای ترتیبهای جزئی کامل یک توپولوژی تعریف می‌کند که T_0 است و توپولوژی اسکات نامیده می‌شود. یک تابع بین دو ترتیب جزئی کامل نسبت به توپولوژی اسکات پیوسته است اگر و تنها اگر یکنوا باشد و کوچکترین کران بالایی زنجیرهای شمارش‌پذیر صعودی را حفظ کند. از اینجا قضیه‌ای شبیه به قضیهٔ تارسکی برای شبکه‌های کامل نتیجه می‌شود: هر تابع پیوسته روی یک ترتیب جزئی کامل که دارای زیرینه (یعنی کوچکترین عنصر) باشد یک نقطهٔ ثابت دارد که کوچکترین نقطهٔ ثابت تابع هم است.

از این قضیه در نظریهٔ معنی‌سازی برای مشخص نمودن توابعی که به طور بازگشتی تعریف شده‌اند، استفادهٔ عمده‌ای می‌شود.

برای آنکه به یک نظریهٔ کارامد دست یابیم، لازم است با دسته‌ای از ترتیبهای جزئی کامل کار کنیم که *شبه پیوسته* نام دارند. اینها دارای یک زیر مجموعهٔ شمارش‌پذیرند که *پایه* نام دارد و خواص آن ساختار کارامد را ممکن می‌سازد. به عنوان مثال، بازهٔ $[0,1]$ با ترتیب جزئی معمولی اعداد حقیقی یک ترتیب جزئی کامل *شبه‌پیوسته* است و اعداد گویای بین ۰ و ۱ پایهٔ شمارش‌پذیری برای آن تشکیل می‌دهند. در یک ترتیب جزئی کامل *شبه‌پیوسته*، کوچکترین کران بالایی هر زنجیرهٔ صعودی از عناصر پایه که کارامد باشد *محاسبه‌پذیر* است. یک تابع بین دو ترتیب جزئی کامل *شبه‌پیوسته محاسبه‌پذیر* است هرگاه عناصر محاسبه پذیر را به طور کارآمد به عناصر محاسبه‌پذیر تصویر نماید. به این صورت می‌توان به نظریهٔ کارامدی برای معنی‌سازی در زبانهای برنامه‌سازی دست یافت. برای آشنایی با کاربرد نظریهٔ قلمرو در معنی‌سازی به کتاب زیر مراجعه کنید

C. Gunter, *Semantics of Programming Languages*, MIT Press, 1992

در ۲۰ سال گذشته، نظریهٔ قلمرو به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات در ارتباط نزدیک با نظریهٔ معنی‌سازی تکامل یافت، به طوری که هم اکنون یکی از شالوده‌های اصلی علوم کامپیوتر نظری را تشکیل می‌دهد. منطق مشاهده در ۱۰ سال گذشته توسط سامسون آبرامسکی (Samson Abramsky)، پیتر جانستون (Peter Johnstone)، مایکل اسمیت (Michael Smyth) و استیو ویکرز (Steve Vickers) در ارتباط نزدیک با نظریهٔ قلمرو شکل گرفته و تفکر جون باروایز (Jon Barwise) منطقدان امریکایی در زمینهٔ نظریهٔ وضعیت در چند

سال اخیر با منطق مشاهده و در نتیجه با نظریهٔ قلمرو تجانس یافته است.

لیکن تاکنون نظریهٔ قلمرو، جدا از شاخه‌های اصلی ریاضیات که با توپولوژیهای هاوسدورف سرو کار دارند تکامل یافته است، به طوری که متخصصان این شاخه‌های اصلی تا به حال با نظریهٔ قلمرو آشنایی پیدا نکرده‌اند.

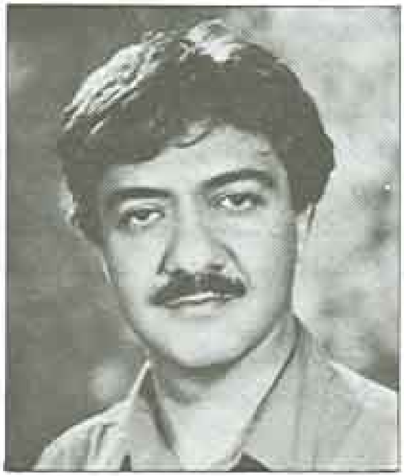
ما در اینجا برای اولین بار یک ارتباط اساسی بین نظریهٔ قلمرو و پاره‌ای از شاخه‌های اصلی ریاضیات یعنی سیستمهای دینامیکی، برخالها (fractals) و نظریهٔ اندازه ارائه می‌دهیم. پل ارتباطی در این زمینه، مفهوم فضاهای توانی، و به طور مشخص فضای بالایی و فضای احتمالی، است. فضای بالایی یک فضای توپولوژیک مرکب است از زیر مجموعه‌های فشردهٔ غیر تهی فضای مزبور با توپولوژی Tای که توپولوژی بالایی نام دارد. این توپولوژی ترتیب جزئی ویژه‌ای القا می‌کند، بدین ترتیب که هر مجموعهٔ فشرده که زیرمجموعهٔ مجموعهٔ فشردهٔ دیگر باشد از آن بزرگتر است. بنابراین فضای بالایی یک ترتیب جزئی کامل است که در آن کوچکترین کران بالایی زنجیرهای شمارشپذیر صعودی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ غیر تهی اشتراک این زیرمجموعه‌هاست. اگر فضای اولیه موضعاً فشرده و دارای پایهٔ شمارشپذیر باشد، آنگاه فضای بالایی یک ترتیب جزئی کامل سپیوسته است و می‌توان به آن ساختار کارامدی نسبت داد.

اگر فضای بالایی فضای X را با $U(X)$ نشان دهیم و اگر $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته باشد، آنگاه تابع

$$U(f) : U(X) \to U(Y)$$
$$A \mapsto f(A)$$

یک تابع خوش تعریف و پیوسته خواهد بود.

می‌توان نشان داد که هرگاه (X, f) یک سیستم دینامیکی گسسته باشد که با عمل تابع پیوستهٔ $f : X \to X$ روی فضای متری کامل X داده شده است، آنگاه (X, f) و $(U(X), U(f))$ دارای خواص دینامیکی و توپولوژیکی مشترک‌اند. به طور مشخص می‌توان گفت که آشوبناک بودن هر یک، آشوبناک بودن دیگری را نتیجه می‌دهد. مجموعه‌های ناوردا و رباینده‌های



عباس عدالت عضو پژوهشی بخش محاسبات امپریال کالج لندن است. وی پیش از این یک سال در دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف تدریس کرده است. عدالت تحصیلات خود را در امپریال کالج و دانشگاه واریک انگلستان در زمینهٔ سیستمهای دینامیکی به انجام رسانیده است. پژوهشهای وی عمدتاً در زمینهٔ سیستمهای دینامیکی و علوم کامپیوتر نظری است.

سیستم مانند رباینده‌های غریب (strange attractors) را می‌توان به عنوان کوچکترین نقطهٔ ثابت $U(f) : U(X) \to U(X)$ به دست آورد. از آنجا که $U(X)$ هنگامی که X موضعاً فشرده و دارای پایهٔ شمارشپذیر باشد، یک ساختار کارامد دارد، می‌توان از این طریق محاسبه‌پذیری مجموعه‌های ناوردا و رباینده‌های سیستم را بررسی کرد. یکی از کاربردهای مهم این روش بررسی محاسبه پذیری مجموعه‌های ژولیاست که طی یکی دو دههٔ اخیر مورد مطالعهٔ وسیع بسیاری از ریاضیدانان بوده است. کاربرد دیگر آن در محاسبهٔ رباینده‌های سیستمهای تابعی تکراری (iterated function systems) است که به عنوان کوچکترین نقطهٔ ثابت یک تابع پیوسته روی فضای بالایی به دست می‌آیند.

ارتباط نظریهٔ قلمرو و نظریهٔ اندازه از طریق قلمرو توانی احتمالی (probabilistic power domain) تحقق می‌یابد. به هر فضای توپولوژیک X می‌توان یک فضای جدید $P(X)$، مرکب از اندازه‌هایی متناهی که بر روی مجموعه‌های باز تعریف شده‌اند، نسبت داد. این اندازه‌ها دارای یک ترتیب جزئی طبیعی‌اند که از طریق آن $P(X)$ یک ترتیب جزئی کامل می‌شود. هرگاه X یک ترتیب جزئی کامل سپیوسته باشد، آنگاه $P(X)$ نیز چنین خواهد بود. پیشتر گفتیم که اگر Y موضعاً فشرده و دارای پایهٔ شمارشپذیر باشد، آنگاه $U(Y)$ ترتیب جزئی کامل سپیوسته‌ای خواهد بود. بنابراین، $P(U(Y))$ نیز یک ترتیب جزئی کامل سپیوسته است. می‌توان نشان داد که مجموعهٔ اندازه‌های بورل روی Y قابل نشاندن در $P(U(Y))$ است. از آنجا که $P(U(Y))$ دارای یک ساختار کارامد است، می‌توان از این طریق یک اندازهٔ بورل روی Y را به طور کارامد و به صورت حد دنباله‌ای از ترکیبات خطی اندازه‌های تک نقطه‌ای به دست آورد. از این راه، روش کارامدی برای انتگرالگیری نیز حاصل می‌شود. یکی از کاربردهای مهم در اینجا، محاسبهٔ اندازهٔ ناوردای یک سیستم تابعی تکراری با احتمالات است. برای اطلاعات بیشتر به کتاب زیر رجوع کنید

M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988

این اندازهٔ ناوردا در حقیقت کوچکترین نقطهٔ ثابت یک تابع پیوسته روی $P(U(Y))$ است. از این اندازهٔ ناوردا در گرافیک کامپیوتری و فشرده‌سازی تصاویر استفاده می‌شود.

برای آشنایی با جزئیات کامل می‌توانید به مقالهٔ زیر مراجعه کنید:

Abbas Edalat, *Dynamical Systems, Measures and Fractals via Domain Theory*, Proceedings of the First Imperial College Theory and Formal Methods Workshop, Springer Verlag, 1993.