بیستمین سال تاسیس
پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
۱۳۶۸-۱۳۸۸

فلسفه‌ی احتمال: مطالعه‌ی گروهی

کاوه لاجوردی*

زیاد پیش می‌آید که درباره‌ی رویدادی بگوییم که احتمالش فلان مقدار است — مثلاً شاید بگوییم که روزِ پنجم آبانِ سالِ آینده به‌احتمالِ ۰٫۳ در نی‌ریز باران می‌بارد، یا به‌احتمالِ کمتر از ۰٫۶ ایران در بازی‌های آسیایی سوم می‌شود، یا اتمِ دلخواهی از این توده‌ی کربن ۱۴ به احتمالِ ۰٫۵ بعد از کمتر از شش هزار سال متلاشی می‌شود. وقتی چنین جمله‌هایی می‌گوییم، داریم چه می‌گوییم؟

تا جایی که به کارِ خالصِ *ریاضی* مربوط می‌شود، بسا که ریاضی‌دان کاری به این سؤال نداشته باشد. ریاضی‌دانِ نوعی شاید به ما بگوید که، از منظرِ ریاضی، او با فضای *احتمال* سروکار دارد که، بنا بر تعریف، فضای اندازه‌ای است با این خاصیت که اندازه‌ی فضا ۱ است. با این تعریف، ریاضی‌دان می‌تواند قضایای نظریه‌ی احتمال را اثبات کند — یا دست‌کم برای *دنبال‌کردنِ اثبات‌ها* (آن‌طور که در کتاب‌های پیشرفته‌ی نظریه‌ی احتمال هست) نیازی به دانستنِ چیزی بیش از این در موردِ احتمال نیست. در موردِ جمله‌های بندِ اول، اندازه‌ی احتمال را مشخص کنید، و بعد معلوم است که داریم چه می‌گوییم: داریم می‌گوییم مقدارِ تابعِ احتمال به‌ازای (گزاره‌ی بیان‌کننده‌ی) رویدادِ خاصی فلان مقدار است. مشکلِ بعدی را بفرمایید!

[*یادآوری*. مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی دلخواهِ Ω را یک **σ-جبر** روی Ω می‌خوانیم اگر حاویِ Ω باشد و تحتِ مکمل‌گیری و اجتماعِ شمارا بسته باشد. اگر A σ-جبری روی Ω باشد، تابعِ μ با مقادیرِ در بازه‌ی بسته‌ی صفر تا بی‌نهایتِ مثبت را یک **اندازه** روی (Ω, A) می‌خوانیم اگر مقدارش روی هر اجتماعِ شمارای اعضای مجزای A مساویِ مجموعِ مقادیرِ μ در آن مجموعه‌ها باشد (اصطلاحاً: اگر μ **به‌طورِ شمارا جمع‌پذیر** باشد). سه‌تاییِ (Ω, A, μ) یک **فضای اندازه** است اگر A σ-جبری روی Ω باشد و μ اندازه‌ای روی (Ω, A). اگر (Ω, A, μ) یک **فضای احتمال** باشد (یعنی یک فضای اندازه باشد و $\mu(\Omega) = ۱$)، ریاضی‌دان به اعضای A **رویداد** می‌گوید. با تفاوت‌هایی در اصطلاح‌شناسی، اینها که گفتم بیانِ اصولی است که کولموگوروف در ۱۹۳۳ منتشر کرده است.]

اما برای فهمِ درگیریِ روزمره‌مان با احتمال — یا دست‌کم برای فهمِ درگیریِ روزمره‌مان با گفتمانِ احتمالاتی — به‌چیزی بیش از این نیاز داریم. این‌طور نیست که به هر تابعی که در اصولِ کولموگوروف صدق کند «احتمال» بگوییم: با تغییراتِ ساده‌ای (**بهنجارسازی**) در تابعی که به هر شیء مادّی جرمش را نسبت دهد می‌توان کاری کرد که تابعِ تغییریافته در اصولِ کولموگوروف صدق کند؛ اما مسلماً نمی‌خواهیم چنین تابعی را یک تابعِ *احتمال* بخوانیم!

مشکلاتِ دیگری هم هست. مثال‌های متعارفِ متن‌های مقدماتی را در نظر بگیرید: *سکه‌ی سالمی را پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است احتمالِ این‌که* ... . اما سکه‌ی «سالم» چگونه سکه‌ای است؟ شرطِ لازم برای سالم‌بودنِ سکه این است که احتمالِ شیرآمدن و احتمالِ خط‌آمدن در هر پرتاب مساوی باشد. اما، دست‌کم در نظرِ اول، به‌نظر می‌رسد که راهی برای تحقیقِ سالم‌بودنِ سکه وجود ندارد: هر مجموعه‌ی *متناهی* از رویدادها در پرتابِ سکه با این امر سازگار است که احتمالِ شیرآمدن ۰٫۵ است. توسل به به‌اصطلاح قانون‌های اعدادِ بزرگ هم مسئله‌ی ما را حل نمی‌کند: این قانون‌ها قضیه‌هایی‌اند حاکی از این‌که حدِ دنباله‌ای از مقادیرِ تابعِ احتمال، یا احتمالِ حدِ بالاییِ تابع‌هایی از متغیرهای تصادفی، ۰ یا ۱ است. خودِ *این قضیه‌ها* احکامی احتمالاتی‌اند؛ بنابراین اگر مشکلِ من این باشد که چطور تحقیق کنم که احتمالِ شیرآمدنِ یک سکه‌ی خاص چقدر است این قضیه‌ها به کارم نمی‌آید، حتی اگر بتوانم به صورتِ تجربیِ آزمایشی را هر قدر بخواهم تکرار کنم. (لطفاً در برابرِ این وسوسه مقاومت کنید که سالم‌بودنِ سکه را اصلاً برحسبِ تقارنِ فیزیکی تعریف کنید.)

مسئله‌ی ما پیدا کردنِ تعبیر یا تحلیلِ مناسبی از احتمال است. تعبیرِ «مناسب» چگونه تعبیری است؟ به نظر می‌رسد که باید به اینها نظر داشت:

(I) تعبیری که از احتمال به دست می‌دهیم باید همه یا دست‌کم بخشِ معتنابهی از قضایای ریاضیِ احتمال را صادق کند. [چرا نه لزوماً همه‌ی قضایا را؟ نکته این است که دستگاه‌های اصل‌موضوعیِ متفاوتی — با قضیه‌هایی متفاوت — برای احتمال وجود دارد. مشخصاً: از جمله در آثارِ خودِ کولموگوروف بحث‌هایی هست در موردِ کفایتِ جمع‌پذیریِ متناهی (به جای جمع‌پذیریِ شمارا). شاید تحلیلِ نهایی به ما نشان بدهد که احتمال لازم نیست به‌طورِ شمارا جمع‌پذیر باشد.]

(II) باید چنان باشد که، دست‌کم علی‌الاصول، بشود احتمالِ رویدادها را محاسبه کرد.

* پژوهشکده‌ی فلسفه‌ی تحلیلی، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

(III) تعبیر باید ربطِ احتمال به بسامد را نشان دهد ــ انتظارِ طبیعیِ ما این است که نوعاً احتمالِ رویدادهای پربسامدتر بیشتر باشد.

(IV) تعبیر باید ربطِ احتمال به تصمیم‌گیریِ عقلانی و میزانِ باورِ عقلانی را نشان بدهد ــ به نظر می‌رسد که، با یکسان‌بودنِ بقیه‌ی شرایط، اگر احتمالِ الف را بیشتر از احتمالِ ب بدانیم باید به وقوعِ الف اطمینانِ بیشتری داشته باشیم تا به وقوعِ ب.

(V) تعبیر باید بتواند نقشِ احتمالات در علم را تبیین کند.

شاید بشود گفت که بخش مهمی از مشکلِ یافتن تعبیرِ مناسبی برای احتمال ناشی از دشواریِ کنارِ هم آوردنِ (III) و (IV) است. سنّتاً تعبیرهایی از احتمال را که بر بسامد تکیه می‌کنند **بسامدگرا** (یا **عینی**) و تعبیرهایی را که بر باورِ عقلانی تکیه می‌کنند **ذهنی** (یا **شخصی**، یا **بیزی**) می‌خوانند. با مقداری کم‌دقتی می‌شود گفت که بسامدگرایان در برآوردنِ (IV) و ذهنی‌گرایان در برآوردنِ (III) به مشکل برمی‌خورند. هرکدام از این دو مکتب نسخه‌های متعدد ــ و بعضاً متعارض ــ دارند. بعضی بسامدگرایانِ معروف: لاپلاس، فون‌میزس، پوپر؛ بعضی ذهنی‌گرایان: جان مینارد کِینز (اقتصاددانِ معروف)، رمزی.

تا این گزارش برای همه‌ی خوانندگان کاملاً خالی از مطالبِ فنّی نباشد کمی درباره‌ی رهیافتِ رمزی [4] صحبت می‌کنم. رمزی درجه‌ی باورِ شخصِ الف را با آمادگیِ او برای شرکت در نوعِ خاصی از شرط‌بندی می‌سنجد. (بدیهی است که در اینجا درباره‌ی شرط‌بندی ملاحظاتی هست: این‌که آیا باید سود و زیان بر حسبِ پول باشد یا چیزِ دیگری («فایده»)، اینکه باید ترجیحاتِ الف اندازه‌پذیر و جمعی باشد، و از این قبیل. رمزی نسبتاً به تفصیل به اینها می‌پردازد، و در مواردی با بعضی طرفداران دیگرِ این نوع رهیافت ــ از جمله برونو دفینتّی ــ اختلاف دارد.) فرض کنید می‌خواهیم احتمالِ ذهنی‌ای را که الف به رویدادِ E نسبت می‌دهد بسنجیم. الف عددِ p را در بازه‌ی [۰,۱] انتخاب می‌کند، و می‌داند که من Sای تعیین خواهم کرد. الف می‌داند که قرار بر این است اگر E رخ بدهد من به الف مبلغِ S بدهم و او مبلغِ pS به من بدهد. S می‌تواند مثبت یا منفی باشد، و الف از قبل نمی‌داند که انتخابِ من چه خواهد بود (مثبت یا منفی‌بودن‌اش را هم نمی‌داند). در این شرایط می‌گوییم که p **احتمالِ ذهنی**ِ الف برای E است.

حالا این چه ربطی دارد به احتمالی که از ریاضیات می‌شناسیم؟ به دنباله‌ای از شرط‌بندی‌ها یک **شرط‌بندیِ هلندی** [Dutch book] برای الف می‌گوییم در صورتی که من بتوانم Sهایی تعیین کنم که اگر الف در موردِ اعضای این دنباله با من شرط ببندد در هر صورت مجموعاً مبلغی از دست بدهد. توزیعِ احتمال‌ها به رویدادها را **منسجم** می‌گوییم اگر برایش شرط‌بندیِ هلندی‌ای وجود نداشته باشد. **قضیه‌ی رمزی-دفینتّی** می‌گوید که توزیعِ احتمال‌ها منسجم است اگر و فقط اگر ــ نفس عمیق بکشید! ــ در اصولِ کولموگوروف (با جمع‌پذیریِ متناهی) صدق کند. اثباتِ این قضیه سخت نیست. (توجه کنید که رمزی چند سالی پیش از انتشارِ کارِ کولموگوروف مرده است.)

پس، بالاخص، قانونِ بیز برای توزیع‌های منسجمِ احتمالات هم درست است. این قانون برای طرفدارانِ رهیافتِ ذهنی اهمیتِ زیادی دارد: ابزارِ اصلی‌شان برای مدل‌سازیِ مفهومِ اصلاحِ باورها است.

اما آیا نظریه‌ی رمزی می‌تواند ربطِ احتمال به بسامد را توضیح بدهد؟ و چگونه است که با این‌که می‌شود با احتمالاتِ ذهنیِ منسجمِ متفاوت برای رویدادها کار را شروع کرد، به نظر می‌رسد که نهایتاً مردم احتمالاتِ کمابیش یکسانی به رویدادها نسبت می‌دهند؟ آیا قانونِ بیز می‌تواند این امر را تبیین کند؟ به نظر می‌رسد که جوابِ سؤال‌های اول و سوم منفی است ــ و کتابِ [1] برای دفاع از این جواب‌های منفی استدلال‌های فلسفی و ریاضیِ بسیار جالبی دارد. اما کم‌کم داریم از حدِ معمولِ طولِ گزارشی از این دست برای *اخبار* فراتر می‌رویم ... .

در تابستانِ هشتادوهشت گروهی از کسانی که دغدغه‌ی تعبیرِ احتمال داشتند در ساختمانِ نیاورانِ پژوهشگاه دورِ هم جمع می‌شدند و بحث می‌کردند ــ امیرحسین اصغری (دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی)، روزبه توسرکانی (پژوهشکده‌ی ریاضیاتِ پژوهشگاه دانش‌های بنیادی)، کسری علیشاهی (دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف)، کاوه لاجوردی (پژوهشکده‌ی فلسفه‌ی تحلیلی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی)، محمد مقدم (پژوهشکده‌ی ریاضیاتِ پژوهشگاه دانش‌های بنیادی)، مصطفی مهاجری (دانشجوی دوره‌ی دکتری در پژوهشکده‌ی فلسفه‌ی تحلیلی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی). در هر جلسه فرض بر این بود که شرکت‌کنندگان فصلِ مربوطی از [1] را خوانده‌اند. درباره‌ی فصل بحث می‌کردیم، اما به آن محدود نمی‌ماندیم. کتاب همه‌ی رهیافت‌های معروف را توضیح داده و نقد کرده است.

در پایانِ این دوره، بعضی شرکت‌کنندگان قدم‌هایی برای پروراندن و تنقیحِ رهیافتِ خاصِ خودشان برداشتند، بعضی بیشتر از قبل متقاعد شدند که حق البته با پوپر است، بعضی به یقین رسیدند که هیچ تعبیرِ معقولی از احتمال نمی‌شود به دست داد، و بعضی حرفِ رمزی را پذیرفتند که *احتمالاً* واژه‌ی «احتمال» دست‌کم دو معنا دارد: یکی ذهنی و دیگری بسامدی.

مراجع

[1] Donald Gillies, *Philosophical Theories of Probability*, Routledge, 2000.

[2] Alan Hájek, "Interpretations of probability", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2009.

http://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/

[3] Ian Hacking, *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*, 2nd, ed. Cambridge University Press, 2006.

[4] Frank P. Ramsey, "Truth and probability", 1926.

http://fitelson.org/probability/ramsey.pdf

[1] متنی است که محورِ مکتوبِ جلسات بود. ترجمه‌ی فارسی‌ای از این کتاب منتشر شده است: دانلد گیلیز، *نظریه‌های فلسفی احتمال*، ترجمه‌ی محمدرضا مشکانی، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۶. [2] مرورِ خوشخوان جامعی بر تعبیرهای احتمال است. (تقریباً هر حرفِ درستِ این گزارشی که در اواخرش هستید برگرفته از [2] است.) [3] نمونه‌ی معروفی از تاریخ‌نگاری به سبکِ فوکو است. [4] مقاله‌ی مشهورِ رمزی است. که مشتمل بر نقدِ ویرانگری بر رهیافتِ منطقیِ کِینز هم هست ــ بخوانید!