

## اویلر و ترکیبیات \*

از این هم جلوتر رفت و فرمول  $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$  را به دست آورد. چنانکه گفته است، اینکه هر دو دستور به نتیجه واحدی می‌انجامند «معجزآسا می‌نماید». از اینجا به فرمول صریح

$$d_n = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} - \frac{3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right],$$

رسید که یادآور بسط اویلر از  $e^{-1}$  است.

مسئله دوم دربارهٔ افزایش اعداد طبیعی است. توجه اویلر به موضوع افزایشها در سال ۱۷۴۰ با دریافت نامه‌ای از فیلیپ ناند (Philippe Nandé) جلب شد. او مسائل زیادی در این زمینه حل کرد و ایده‌های بسیاری دربارهٔ تعیین تعداد افزایشها عرضه داشت. در اینجا فقط یکی از نتایج او را ذکر می‌کنیم. او ثابت کرد که تعداد افزایشهای یک عدد طبیعی به اعداد متمایز برابر با تعداد افزایشهای آن عدد به اعداد فرد است. اویلر ضمن تأمل در این مسئله وجود رابطه‌ای بین شمارش افزایشها و ضرب دو جمله‌ایهای جبری را به نحوی تشخیص داد و متوجه شد که ضرب  $x^n$  در بسط

$$Q = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$$

دقیقاً همان تعداد افزایشهای  $n$  به جمعوندهای متمایز است در حالی که ضرب  $x^n$  در بسط

$$R = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\dots}$$

تعداد افزایشها به  $n$  جمعوند فرد است. سپس ثابت کرد که  $Q = R$ . اثبات اویلر، که آن را در پاسخ نامه ناند، فقط چند هفته بعد از اطلاع از مسئله مطرح کرد، استفاده از تابع‌های مولد را در مسائل شمارشی باب نمود.

\*\*\*\*\*

\* نقل از نشریه خبری روزانه (Daily News) کنفرانس، ۲۱ آوریل ۲۰۰۷.



لئونهارت اویلر

امسال سیصدمین سالگرد تولد لئونهارت اویلر است. اگر از ده ریاضیدان به عنوان بزرگترین ریاضیدانان در سراسر تاریخ نام برده شود، اویلر بی‌شک یکی از آنهاست. او دستاوردهای زیادی در هندسه، آنالیز، نظریهٔ اعداد، ترکیبیات و بسیاری از رشته‌های دیگر دارد. به نظر نمی‌رسد اویلر به مسائله‌ای در ریاضیات برخورد کرده باشد و علاقه‌اش به آن جلب نشده باشد. اولین جلد از مجموعه آثار (Opera Omnia) او حدود یکصد سال پیش انتشار یافت و تاکنون ۷۰ جلد از آن، در ۲۵۰۰۰ صفحه، چاپ شده است. ویلیام دانهم (William Dunham) در کتاب خود با عنوان استاد همهٔ ما دربارهٔ دو مورد از دستاوردهای اویلر در ترکیبیات توضیح می‌دهد.

اولین مسئله دربارهٔ نوع خاصی از جایگشت موسوم به «آشفتگی» یا «آشفته‌ساز» است. این مسئله در واقع چند دهه قبل از کار اویلر طرح و حل شده بود. ظاهراً اویلر از کارهای پیشگامان بی‌اطلاع بوده و تحقیق او در این زمینه اصیل و بدیع است. مهمترین دلیل آن این است که مسئله نامبرده نمونه‌ای از مسائله‌ای است که در زمینه‌های متفاوت متعددی مطرح شده و بنابراین ریاضیدانان مختلفی بدون اطلاع از کار یکدیگر آن را حل کرده بودند. منظور از «آشفته‌ساز» یا «آشفتگی»، جایگشتی است که هیچ نقطه ثابتی ندارد. اویلر نخست فرمول بازگشتی  $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$  را به دست آورد که در آن تعداد آشفتگی‌های  $n$  حرف است. ولی ظاهراً چون این فرمول بازگشتی «مضاعف» به نظرش رضایت بخش نمی‌رسیده،

