سخنرانی مریم میرزاخانی در پژوهشگاه

مریم میرزاخانی دورهٔ کارشناسی ریاضی را در دانشگاه صنعتی شریف گذرانده و مدرک دکتری خود را در ریاضیات محض از دانشگاه هاروارد زیر نظر مک مولن برندهٔ مدال فیلدزگرفته است. وی برندهٔ بورس پنج ساله‌ای از مؤسسهٔ کلی (Clay) و در حال حاضر استادیار دانشگاه پرینستن است.

میرزاخانی در خلال مسافرتی به ایران در تاریخ شانزدهم دی‌ماه سال جاری یک سخنرانی در پژوهشگاه در زمینهٔ تحقیقات خود ایراد کرد که موضوع عمدهٔ آن بررسی روابط بین فضاهای پیمانه‌ای (moduli spaces) رویه‌های ریمانی و طول ژئودزیک‌های بستهٔ ساده روی این گونه رویه‌ها بود و دربارهٔ بعضی مسائل مهم در این زمینه که کاربردهای گسترده‌ای دارند توضیحاتی داد. در اینجا شرحی دربارهٔ این سخنرانی می‌خوانید.

تحقیق در فضای رویه‌های ریمانیِ با گونای مفروض g و n سوراخ (که معمولاً فضای پیمانه‌ها یا پیمانه‌ای نامیده و به $\mathcal{M}_{g,n}$ نشان داده می‌شود) بیش از یک صد سال سابقه دارد. دستاورد تایشمولر (Teichmüller) در دههٔ ۱۹۳۰ روشن ساخت که می‌توان رهیافت تحلیلی پرباری به این مسأله در پیش گرفت که $\mathcal{M}_{g,n}$ را به‌صورت خارج قسمت یک مجموعهٔ باز انقباض‌پذیر $\mathcal{T}_{g,n} \subset \mathbb{C}^{3g-3+n}$ بر یک گروه $\Gamma_{g,n}$ (موسوم به گروه رده‌های نگاشتی) محقق سازد که به‌طور گسستهٔ سره (properly discontinuously) بر آن مجموعه عمل می‌کند. این چارچوب یادآور کنش آشنای گروه مدولار (modular group) بر نیم‌صفحهٔ پوانکاره است. گروه $\Gamma_{g,n}$ دارای متریک‌های طبیعی است و در این مبحث، متریکی از نوع کهلر (Kähler) که به نام ویل-پترسن نامیده شده و در اصل در نظریهٔ اعداد مطرح شده بود مورد توجه است. (تابع فاصلهٔ مربوط، با آنچه در ابتدا به‌وسیلهٔ تایشمولر معرفی شده بود متفاوت است.) نسبت به جزء حجم القایی، فضای پیمانه‌ای $\mathcal{M}_{g,n}$ دارای حجم متناهی است و محاسبهٔ صریح این حجم‌ها از طریق فرمول‌های بازگشتی، دستاورد میرزاخانی است. در واقع، او برای محاسبهٔ این حجم، مسألهٔ کلی‌ترِ فضاهای پیمانه‌ای و تایشمولرِ رویه‌های ریمانیِ با گونای g و n خم مرزی ژئودزیک با طول‌های مفروض را بررسی کرده است. وقتی خم‌های مرزی تباهیده شده و به‌سوراخ تبدیل شوند، همان چارچوب کلاسیک را خواهیم داشت.

مسأله‌ای که ظاهراً بی‌ارتباط با این مسأله است ولی نقش مهمی درکار میرزاخانی داشته است، شمارش طول‌های ژئودزیک‌های بستهٔ سادهٔ یک رویهٔ ریمانی هذلولوی است. یکی از دانسته‌های مقدماتی در این زمینه این است که هر عنصر هذلولوی γ درگروه بنیادیِ یک رویهٔ ریمانی سوراخ‌دار معرّف یک ژئودزیک بستهٔ یکتاست و طول آن به‌آسانی قابل محاسبه است. از آن گذشته، قضیه‌ای متناظر با قضیهٔ اعداد اول که تعداد ژئودزیک‌های بسته به‌طول کوچکتر یا مساوی x را، مستقل از رویهٔ هذلولوی خاصِ مورد نظر، به‌طور مجانبی به‌صورت e^x/x تخمین می‌زند در این مورد صادق است. ولی کارهای بیرمن (Birman) و سریز (Series) نشان داده بود که ژئودزیک‌های بستهٔ ساده در مقایسه با ژئودزیک‌های بسته، نادرند، و مسألهٔ شناخت فضای ژئودزیک‌های ساده مشکلات تازه‌ای پیش می‌آورد. در این مبحث باید بین دو نوع ژئودزیک بستهٔ ساده تمایز قائل شد: آنهایی‌که رویه را ناهمبند می‌سازند و آنهایی که چنین نمی‌کنند.

میرزاخانی در تحقیقات خود نه تنها یک فرمول مجانبی برای تعداد ژئودزیک‌های بستهٔ به‌طول کوچکتر یا مساوی x به‌دست آورده که این تعداد را به‌صورت مضرب ثابتی از x^{6g-6+n} (وقتی $x \to \infty$) به دست می‌دهد بلکه اطلاع دقیقی دربارهٔ ماهیت ضریب ثابت کسب کرده است. او همچنین نشان داده است که نسبت مجانبی تعداد ژئودزیک‌هایی که رویه را ناهمبند نمی‌کنند به آنهایی که چنین می‌کنند همواره عددی گویاست و در مورد یک رویهٔ هذلولوی فشرده برابر است با ۶.

اثبات این حکم‌ها طبیعتاً طولانی‌تر و فنی‌تر از آن است که در اینجا بیاید، اما شاید شرح مختصری از آن بتواند خواننده را قدری با ایده‌های زیبا و عمیقی که در این تحقیق وجود دارد، آشنا کند. یک نقطهٔ شروع مناسب فرمول شگفت‌آوری است که مک‌شین (McShane) در آغاز در حالت خاصِ یک چنبرهٔ هذلولوی با یک سوراخ عرضه کرد. طبق این فرمول

$$\sum \frac{1}{1+e^{l(\gamma)}} = \frac{1}{2}$$

که در آن، مجموعیابی روی همهٔ ژئودزیک‌های بستهٔ سادهٔ γ انجام می‌شود، و $l(\gamma)$ نشان دهندهٔ طول آن است. به‌خصوص، کمیت سمت چپ این رابطه مستقل از انتخاب چنبرهٔ یک سوراخهٔ هذلولوی است. فضای پیمانه‌ای چنین چنبره‌هایی، $\mathcal{M}_{1,1}$، فضایی با بعد مختلط ۱ است. برای محاسبهٔ حجم ویل-پترسن، فضای کمکی، $\mathcal{M}'_{1,1}$، مرکب از جفت‌های (M,γ) در نظرگرفته می‌شود که در آن $M \in \mathcal{M}_{1,1}$ و γ ژئودزیک بستهٔ ساده‌ای بر M است. یک جنبهٔ مهم $\mathcal{M}'_{1,1}$ این است که می‌توان آن را برحسب مختصات فنشل-نیلسن (Fenchel-Nielsen) (l,τ) برای فضای تایشمولر توصیف کرد و جزء حجم ویل-پترسن (القایی) دارای عبارت سادهٔ $dl \wedge d\tau$ در این دستگاه مختصات است. با استفاده از این توصیف و نگاشت $\mathcal{M}'_{1,1} \to \mathcal{M}_{1,1}$ که به‌وسیلهٔ تصویر روی مختص اول القا می‌شود، می‌توان

$$\int_{\mathcal{M}'_{1,1}} \frac{1}{1+e^{l(M,\gamma)}} dl \wedge d\tau$$

را به دو طریق متفاوت محاسبه کرد. انتگرال‌گیری مستقیم به مقدار $\frac{\pi^2}{12}$ می‌انجامد ولی با تعبیر مجدد و به‌کمک فرمول مک‌شین-ریوین (Rivin) به $\frac{1}{2}\mathrm{vol.}(\mathcal{M}_{1,1})$ می‌رسیم.

با تعمیم این ایده به حالت کلی، فرمول‌های بازگشتی‌ای برای حجم فضاهای پیمانه‌ای $\mathcal{M}_{g,n}$ به‌دست می‌آید. گام اول، تعمیم فرمول مک‌شین برای رویه‌های ریمانی با مؤلفه‌های مرزی ژئودزیک است. این تعمیم مستلزم استفاده از به اصطلاح تجزیهٔ شلواری (pairs of pants decomposition) یک رویهٔ هذلولوی است که در توصیف فنشل-نیلسن از فضاهای پیمانه‌ای و تایشمولر اهمیت اساسی دارد و به‌فرمولی می‌انجامد که متضمن طول مؤلفه‌های مرزی است ولی پیچیده‌تر از آن است که در اینجا شرح داده شود. فرمول بازگشتی مطلوب با بریدن رویه در طول یک ژئودزیک بستهٔ ساده به‌دست می‌آید که ممکن است رویه را ناهمبند کند یا نکند، ولی چارچوبی برای ربط دادن حجم یک فضای پیمانه‌ای به حجم فضاهای دیگر با ساختارهایی نسبتاً ساده‌تر فراهم می‌کند. این قسمت شاید فنی‌ترین قسمتِ کار میرزاخانی باشد. در تعبیرِ ثابت موجود در فرمول مجانبی برای تعداد ژئودزیک‌های بسته از مفهوم لایه‌بندی (lamination) ژئودزیک اندازه‌گیری شدهٔ یک رویهٔ هذلولوی استفاده می‌شود. نکتهٔ اساسی این است که فضای $\mathcal{ML}_{g,n}$ از لایه‌بندی‌های ژئودزیک اندازه‌گیری شده، دارای ساختار طبیعیِ یک خمینهٔ قطعه‌قطعهٔ خطی (PL) است که گروه رده‌های نگاشتی بر آن (به‌طور غیر خطی) عمل می‌کند. به‌دلیل ماهیت متعارف این ساختار PL می‌توان معنایی برای مفهوم اجزاء انتگرال در $\mathcal{ML}_{g,n}$، مشابه شبکهٔ $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$، قائل شد. بنابراین، ثابت موجود در فرمول مجانبی برحسب تعداد اجزاء انتگرال در زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{ML}_{g,n}$ و حجم گوی واحد در آنجا محاسبه می‌شود.

میرزاخانی نخست مشاهده کرد که فرمول‌های بازگشتی او برای حجم فضاهای پیمانه‌ای، وقتی طول‌های ژئودزیک‌های مرزی به ∞ میل می‌کنند، به قید معروف ویروزورو (Virosoro) در فیزیک نظری می‌گرایند. در واقع، نتایج قوی‌تری می‌توان گرفت و ساختار جبر ویروزورو اساساً در روابط بازگشتی او (بدون حدگیری) می‌گنجد به شرط اینکه به شکل دیفرانسیلی معادلی بیان شود. فرمول‌های کونتسویچ-ویتن برای بعضی از اعداد تقاطع (intersection numbers) روی فضاهای پیمانه‌ایِ خم‌های جبری را نیز می‌توان درکار او بازیافت.

تقدیر از ۳ تن از محققان برجستهٔ پژوهشگاه

۱. حسین استکی، پژوهشکدهٔ علوم شناختی

در هفتمین جشنوارهٔ پژوهش و فناوری کشور که در دی ماه ۱۳۸۵ برگزار شد، دکتر حسین استکی از پژوهشکدهٔ علوم اعصاب شناختی به خاطر چاپ مقالهٔ مهمی در مجلهٔ نیچر* به‌عنوان پژوهشگر برتر در بخش ویژهٔ جشنواره برگزیده شد.

در پژوهشی که توسط آقایان حسین استکی، سیدرضا افراز، و روزبه کیانی انجام شده و نتایج آن در مجلهٔ مزبور به چاپ رسیده، نشان داده شده است که ادراکات بینایی پیچیده مانند شناخت چهره، وابسته به فعالیت تعداد محدودی از سلول‌های عصبی قشر مغز است، و می‌توان با تأثیرگذاری بر فعالیت الکتریکی مغز، درک بینایی و تصمیم‌گیری وابسته به آن را کنترل کرد.

در شمارهٔ آینده با تفصیل بیشتری به این دستاورد مهم خواهیم پرداخت.

* **S.R. Afraz, R. Kiani**, and **H. Esteky**, *Microstimulation of inferotemporal cortex influences face categorization*, Nature **442** (2006), 692-695.

۲. حمید سربازی آزاد، پژوهشکدهٔ علوم کامپیوتر

در بیستمین جشنوارهٔ بین‌المللی خوارزمی که در بهمن‌ماه سال ۸۵ برگزار شد، دکتر حمید سربازی آزاد به خاطر طرحی پژوهشی با عنوان « خواص ساختاری، ارزیابی کارایی، و الگوریتم‌های کاربردیِ شبکهٔ ستاره» برندهٔ رتبهٔ سوم در ردهٔ پژوهش‌های بنیادی در علوم پایه و جایزهٔ دانشمند جوان **TWAS** در علوم مهندسی شد. خلاصه‌ای از این طرح را به قلم ایشان در زیر می‌خوانید.

همبندی ستاره به‌عنوان یک جایگزین مناسب برای شبکهٔ فوق مکعب معرفی شده است که توپولوژی مشهور و پرکاربردی است. گراف ستاره می‌تواند تعداد زیادی گره را با تعداد کانال‌های فیزیکی کمتری نسبت به فوق مکعب به‌هم متصل کند و در ضمن قطر و فاصلهٔ متوسط آن نیز کمتر است. به همین دلیل گراف ستاره همبندی مناسبی برای ساخت ابر رایانه‌های بزرگ است. درگذشته خواص این شبکه به خوبی مطالعه شده است، اما هنوز خواص و مسائل بسیاری در این نوع شبکه باید بررسی