دو دیدگاه

در کارگاه «هندسهٔ ناجابه‌جایی» که در شهریورماه سال جاری در پژوهشگاه برگزار شد (ر.ک.ص ۲۰) اختلاف مشربی بین ریاضیدانان و فیزیکدانان بر سر مفاهیم این موضوع به‌چشم می‌خورد که اطلاع از چند و چون آن ممکن است برای خوانندگان اخبار جالب باشد. در اینجا برداشت یک ریاضیدان (مسعود خلخالی) و یک فیزیکدان (محمدمهدی شیخ‌جباری) را از این موضوع می‌خوانید.

هندسهٔ ناجابه‌جایی برای شاعران

مسعود خلخالی

و من اکنون اینجایم، در میانهٔ راه، بیست سال را سپری کرده...
بیست سالی که عمدتاً تلف شدند، سال‌های بین دو جنگ
سعی کردم از کلمات استفاده کنم، و هر تلاش
شروعی کاملاً تازه بود، و شکستی از نوع دیگر
چراکه انسان کار کرد بهتر کلمات را
تنها برای گفتن چیزهایی که دیگر ارزش گفتن ندارند، و یا
دیگر در مقام گفتن آنها نیست، می‌آموزد و بدینسان هر تجربه
شروعی تازه است، و یورشی به ناگویا با ابزاری کهنه و فرسوده
در به‌هم‌ریختگی کلی احساسات ناپخته، با جوخه‌های بی‌نظم احساس
و آنچه برای فتح باقی مانده است
با قدرت و سلطه، قبلاً یک دوبار، و یا چندبار، به‌دست
مردانی که امیدی به پهلو زدن و تکرار آنها نیست، کشف شده‌اند
اما رقابتی در میان نیست ـ تنها نبردی برای تصرف
آنچه که از دست رفته است و یا بارها و بارها یافته و گم شده است
در شرایطی که نامساعد به‌نظر می‌آید
و شاید بُردی و باختی نیز در میان نیست
برای ما، تنها تلاش مانده است و بس. مابقی کار ما نیست.

تی.اس. الیوت، چهار کوارتت

فضاهای کلاسیک

بیشتر حوزه‌های ریاضیات و کاربردهای آن با مفهوم «فضا» خواه به‌عنوان هدف اصلی تحقیق و یا به عنوان ابزاری برای مدون‌سازی اطلاعات به‌صورتی که پذیرای شهود هندسی باشد سروکار دارند. به‌عنوان مثال، توپولوژی و یا هندسهٔ دیفرانسیل به بررسی فضای چند بعدی از نظر توپولوژیکی و یا متریک می‌پردازند، مانند شمارش سوراخ‌های آن در یک بعد خاص، اندازه‌گیری انحنای آن و غیره. همین‌طور در نظریهٔ نسبیت عمومی و فیزیک

انرژی بالا، موضوع اصلی تحقیق، فضا‌ـ‌زمان به‌همراه میدان‌هایی کلاسیک یا کوانتومی است که روی آن تعریف می‌شوند. از طرف دیگر، فضاهای خطی توابع، فضاهای مقاطع یک کلاف برداری، و به‌طورکلی فضاهای غیرخطی توابع میان دو خمینه ابزارهایی هستند که به ما کمک می‌کنند تا اطلاعاتی در مورد فضاهای دامنه و هدف کسب کنیم. به همین ترتیب، زمانی که متخصص کامپیوتر در مورد ابر مکعب صحبت می‌کند، از زبان هندسهٔ n بعدی دکارتی برای تدوین بیت‌های اطلاعات استفاده می‌کند.

ما راه درازی پیموده‌ایم که از ایده‌های ساده و در عین حال پردامنهٔ اقلیدس در مورد فضا و هندسه در بعدهای ۱ و ۲ و ۳ آغاز شده و به‌جایی رسیده است که مفاهیم جدید فضای n بعدی و یا حتی بینهایت بعدی، فضاهای نااقلیدسی و ریمانی و غیره را به‌عنوان زمینه‌ای طبیعی برای شهود هندسی خود می‌پذیریم.

ما این مفاهیم تعمیم یافتهٔ فضا را بدیهی می‌پنداریم و حتی بدتر از آن، اغلب فراموش می‌کنیم که ریاضی‌دانان نسل‌های گذشته باید بر موانع بزرگ روانشناسی، اجتماعی و ریاضی (که کوچکتر از دو مانع دیگر هم نبود)، غلبه می‌کردند تا این مفاهیم را معرفی کنند و بکار بگیرند. انگیزه‌های این کار، طبق معمول، هم از درون ریاضیات و هم ازکاربردهای آن، مثلاً فیزیک، نشأت گرفته است. تغییر اساسی نگرش و چشم‌انداز در مورد مفهوم

فضا مرهون ریاضی‌دانان بزرگ قرن نوزدهم مانند گاوس، ریمان، پوانکاره، و کلاین است. کشف نظریهٔ مجموعه‌ها توسط کانتور و رویکرد صورت‌گرایانهٔ هیلبرت و خیلی پس از آن بورباکی از لحاظ فنی نقش مهمی ایفا کردند و ابزار لازم را برای امکان این تغییر پارادایم را فراهم کردند.

و همین طور نباید نقش محرک فیزیک را فراموش کنیم. اگر هم ارسطو را کنار بگذاریم، فیزیک‌دانان و فیلسوفان علوم طبیعی لااقل از زمان گالیله و نیوتن اغلب از طبیعت فضا و زمان در شگفت بوده‌اند و دربارهٔ آن تأمل می‌کرده‌اند. هرچه باشد، تمام واقعیت‌های فیزیکی در زمان و مکان اتفاق می‌افتند. انقلابی که نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین، هندسی‌سازی نهایی آن توسط مینکوفسکی و نظریهٔ نسبیت عام به پا کردند، باعث شدند که ایدهٔ فضا در مرکز مباحث بزرگ فیزیک بنیادی قرار گیرد.

امروزه ما به این نوع فضاها، فضاهای کلاسیک می‌گوییم یعنی مجموعه‌ای از نقاط که مجهز به ساختاری اضافی، احتمالاً یک توپولوژی یا ساختاری هموار یا متریک، و یا یک اندازه و غیره است. اما این فقط نیمی از داستان است. رویکردی جبری نیز برای توصیف فضای کلاسیک وجود دارد که با داستان ما ارتباط زیادی دارد و راه پیشرفت مفهوم فضا در آینده را می‌نمایاند.

یک دوگانیِ بنیادی

یک موضوع مهم و قدیمی در ریاضیات، تناظر جبر و هندسه است. این ایده بسیار قدیمی است و قدمتی به اندازهٔ خود ریاضیات دارد. اما موضوع این است که هر نسل از ریاضی‌دانان نمونه‌ها و مصادیق جدیدی از این اصل می‌یابند و برای حفظ این اصل، با کشف مفاهیم و ایده‌های جدید در دو طرف تساوی «جبر=هندسه»، مرزهای آن را گسترش می‌دهند.

از لحاظ فیزیولوژیک این امر ممکن است با تقسیم‌بندی مغز ارتباط داشته باشد. انسان با نیمکرهٔ چپ مغز خود به محاسبه و عملیات روی نمادها می‌پردازد و با نیمکرهٔ راست آن، چیزها را تجسم می‌کند. محاسبات طی زمان انجام می‌گیرند و ماهیت زمانی دارند، در حالی که تجسم، آنی و فوری است. پس توجیه خوبی برای این کار همیلتن، یکی از خالقان شیوه‌های جبری مدرن، وجود دارد که رویکرد انتزاعی خود به جبر (مثلاً به‌اعداد مختلط) را «علم زمان خالص» نامید.

به زبان امروزی، تناظر جبر و هندسه در ساده‌ترین شکل آن به این معناست که اطلاعات دربارهٔ یک فضا(ی کلاسیک) را می‌توان برحسب جبر (جابه‌جایی) توابع روی آن فضا بیان کرد. واژه‌های «کلاسیک» و «جابه‌جایی» در اینجا معنای یکسانی دارند. قضیه‌های دوگانی مهم ریاضی، مانند قضیهٔ گلفاند ـ نایمارک، قضیهٔ صفرهای هیلبرت و قضیه‌های مشابه به ما یاد می‌دهند که می‌توانیم به یک فضای کلاسیک از دو دیدگاه متمایز اما هم ارزِ جبری و یا هندسی نگاه کنیم. بنابراین، به‌عنوان مثال، می‌دانیم که اطلاعاتی را که در مورد فضای فشردهٔ هاوسدروف وجود دارد کاملاً می‌توان به زبان جبر توابع مختلط‌مقدار پیوسته روی آن فضا بیان کرد (قضیهٔ گلفاند و نایمارک). جبرهایی را که این‌چنین پدیدار می‌شوند C^*ـجبرهای جابه‌جایی می‌نامیم. این قضیهٔ فوق العاده‌ای است چون بر اساس آن هر ساختار طبیعی‌ای که متضمن فضاهای فشرده و نگاشت‌های پیوسته بین آنها باشد، فرمولبندی کاملاً جبری دارد و به‌عکس، هر گزاره‌ای که راجع به C^*ـجبرهای جابه‌جایی و نگاشت‌های C^*ـجبری بین آنها باشد، معنایی کاملاً توپولوژیک دارد.

با وجود این (و این نکته بسیار مهم است) آرایهٔ گسترده‌ای از C^*ـجبرهای ناجابه‌جایی وجود دارند که به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند، مثلاً در آنالیز همساز (به‌عنوان تکمیل شده‌های جبرهای گروهی گروه‌های ناجابه‌جایی)، در هندسهٔ دیفرانسیل (به‌عنوان جبرهای ناجابه‌جایی منسوب به برگ‌بندی‌ها)، در مکانیک کوانتومی (که با استفاده از عملگرهای کراندار به‌جای عملگرهای بیکران به‌طور صحیح فرمول‌بندی می‌شوند) و به‌طور کلی به‌عنوان جبرهای عملگرهای کراندار بر فضای هیلبرت. هندسهٔ ناجابه‌جایی دوگانیِ پیشگفته میان جبرها و فضاهای جابه‌جایی را با در نظر گرفتن جبری که ضرورتاً جابه‌جایی نیست، مثلاً یک C^*ـجبر، به‌عنوان جبر «توابع روی یک فضای ناجابه‌جایی» بسط می‌دهد.

دیدگاه آلن کُن دربارهٔ فضا

بار دیگر، ما در آستانهٔ تغییر پارادایم در شهود هندسی خود هستیم. مفهوم جدید فضا یعنی فضای ناجابه‌جایی و ریاضیات مربوط به آن یعنی هندسهٔ ناجابه‌جایی ابتکار مردی به نام آلن کُن است که همهٔ نتایج عمده در این نظریه از کار او نشأت می‌گیرد.

از دیدگاه نظریهٔ اندازه، جبرهای فون‌نویمان همتایِ ناجابه‌جایی نظریهٔ اندازهٔ بورل را به‌دست می‌دهند و C^*ـجبرها مفهوم درست فضای موضعاً فشردهٔ ناجابه‌جایی را به ما نشان می‌دهند. هنوز متناظرهای ناجابه‌جایی خمینه‌های هموار به‌طور کاملاً کلی کشف نشده است، اما در حال حاضر می‌دانیم که دست کم یک خمینهٔ ریمانی اسپین ناجابه‌جایی با عملگر دیراک طبیعی‌اش چگونه باید باشد. این موضوع را می‌توان از طریق مفهوم سه‌تایی طیفی فهمید. در واقع، یک ایدهٔ عمده در این نظریه این است که ابتدا مفاهیم و نظریه‌های کلاسیک را به‌زبان طیفی و هیلبرتی بازگو کنیم و بعد به حالت ناجابه‌جایی برویم. به‌عنوان مثال، قانون وایل در مورد رفتار مجانبی ویژه‌مقدارهای لاپلاسی یک خمینهٔ فشرده به ما این امکان را می‌دهد که بُعد و حجم یک خمینه را به‌زبان ناجابه‌جایی تعریف کنیم و آن را به هندسهٔ ناجابه‌جایی تعمیم دهیم.

گذار از فضای کلاسیک به فضای ناجابه‌جایی بسیار شبیه کاری است که هایزنبرگ در ۱۹۲۵ در مکانیک کوانتومی انجام داد. از دیدگاه ریاضی، گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی معادل با گذار از جبر جابه‌جاییِ مشاهده پذیرهای کلاسیک به جبر ناجابه‌جایی مشاهده پذیرهای مکانیک کوانتومی است. به یاد آورید که در مکانیک کلاسیک، هر کمیت مشاهده‌پذیر (مانند انرژی، مکان، تکانه، و غیره) تابعی است بر خمینه‌ای به

نام فضای فاز سیستم. بلافاصله پس از کاری که هایزنبرگ در این زمینه انجام داد، مقالاتی که به قلم دیراک و بورن‌ـهایزنبرگ‌ـجردن انتشار یافت، این مطلب را روشن ساخت که هر کمیت مشاهده‌پذیر در مکانیک کوانتومی، عملگری (خودالحاقی) بر یک فضای هیلبرت موسوم به فضای حالت سیستم است. بنابراین، به‌جای جبر جابه‌جایی توابع بر یک فضا، جبر ناجابه‌جایی عملگرها بر یک فضای هیلبرت قرار می‌گیرد. اندکی بیش از پنجاه سال بعد از این تحولات، آلن کُن دریافت که در واقع می‌توان از شیوهٔ مشابه بسیار مفیدی در حوزه‌هایی از ریاضیات که مفهوم کلاسیک فضا کاربرد و مناسبتی ندارد، استفاده کرد و مفهوم جدیدی از فضا را که به‌وسیلهٔ یک جبر ناجابه‌جایی معرفی می‌شود جایگزین آن کرد.

این نکته فوق‌العاده مهم است که بفهمیم هدف از این تعمیم خود تعمیم نیست. در اینجا، یافتن مفاهیم و نظریه‌های درست و مناسب بسیار دشوار است و پدیده‌های کاملاً جدیدی ظاهر می‌شوند که همتای کلاسیکی ندارند. در واقع، آنچه باعث می‌شود کل پروژهٔ هندسهٔ ناجابه‌جایی برنامه‌ای عملی و بسیار مهم باشد، سه اصل بنیادی زیرند که کُن در کتاب هندسهٔ ناجابه‌جایی خود بر آنها تأکید کرده است:

- مجموعهٔ گسترده‌ای از فضاهای ناجابه‌جایی و شیوه‌هایی بسیار کلی برای ساخت آنها وجود دارد. به‌عنوان مثال، یک «خارج قسمت بدِ» یک فضای خوب و هموار بر یک رابطهٔ هم ارزی را در نظر بگیرید. عموماً، فضای خارج قسمتی حتی هاوسدروف نیست و تکینه‌های بسیار بدی دارد به‌طوری که در خارج از دسترس هندسهٔ کلاسیک و توپولوژی قرار می‌گیرد. فضاهای مداری کنش‌های گروه و فضای برگ‌های یک برگ‌بندی، مثال‌هایی از این وضعیت‌اند. در توپولوژی جبری، با استفاده از مفهوم کلی فضای رده‌بندی، خارج قسمت‌های هوموتوپی جایگزین چنین خارج قسمت‌های بدی می‌شوند. اما، این امر به‌اندازهٔ کافی خوب و کلی نیست چون فضای رده‌بندی تنها یک ساختار هوموتوپی است و هیچ کدام از ساختارهای هموار را نمی‌بیند. یک نتیجه‌گیری مهم کُن این است که در تمامی این وضعیت‌ها می‌توانیم فضای ناجابه‌جایی خوبی همچون یک C^*ـجبر و یا جبر فون‌نویمان در نظر بگیریم که بیشتر اطلاعات پنهان در این خارج قسمت‌ها را در بردارد. این ساختمان کلی با جایگزینی رابطهٔ هم‌ارزی با یک گروهواری و سپس با در نظر گرفتن جبر گروهواری که تعمیمی از جبر گروه‌هاست، آغاز می‌شود.

- امکان بسط دادن بسیاری از ابزارهای هندسهٔ کلاسیک و توپولوژی که برای محک زدن فضاهای کلاسیک به کار می‌روند به این قلمرو ناجابه‌جایی. از میان همهٔ ناورداهای توپولوژیک فضاها، نظریهٔ Kی توپولوژیک اتیا و هیرتسبروخ و قضیهٔ بسیار مهم آن یعنی قضیهٔ تناوب بات، طبیعی‌ترین و ساده‌ترین امکان تعمیم به‌دنیای ناجابه‌جایی را دارد. با استفاده از قضیهٔ دوگانی سرـسوان در مورد تناظر مفهوم هندسی کلاف برداری و مفهوم جبری مدولِ تصویریِ متناهی‌مولد، می‌توان به‌راحتی تابعگون Kی توپولوژیک را به ردهٔ جبرهای باناخ ناجابه‌جایی تعمیم داد. در واقع با این تعمیم، اثبات قضیهٔ تناوب بات ساده‌تر می‌شود! یافتن همتای ناجابه‌جایی درستِ همانستگی دُرام و نظریهٔ چرن‌ـویل بسیار دشوارتر است. این کار در سال ۱۹۸۱ توسط کُن انجام گرفت و نظریهٔ حاصل از آن کوهمولوژی (همانستگی)دوری نامیده می‌شود. نتیجهٔ مهم دیگری که در سال‌های اخیر حاصل شده است، فرمول شاخص موضعی کُن و مسکوویچی است. این نتیجه، تعمیم گسترده‌ای از قضیهٔ شاخص اتیاـسینگر به حالت ناجابه‌جایی است.

- کاربردها. اگر توجه خود را فقط به فضاهای کلاسیک محدود کنیم، بازهم روش‌های هندسهٔ ناجابه‌جایی بسیار ذیربط و سودمند خواهند بود. به‌عنوان مثال در طبیعی‌ترین و کلی‌ترین اثبات‌های حدس نوویکوف در مورد ناوردایی هوموتوپیِ نشان‌های بالاترِ خمینه‌هایی که ساده‌ـهمبند نیستند، از ابزارهای هندسهٔ ناجابه‌جایی استفاده می‌شود. در اینجا، فضای ناجابه‌جایی مربوط، (تکمیل شدهٔ) حلقهٔ گروهی گروه بنیادی خمینه است. مثال دیگری که می‌توان ذکر کرد، اثبات اخیر حدس نشانه‌گذاری حفره (gap labelling) در مورد طیف یک عملگر شرودینگر وابسته به یک شبه‌بلور است که در آن از قضیهٔ شاخص کُن در مورد برگ‌بندی‌ها استفاده می‌شود.

از دستاوردهای جدیدتر هندسهٔ ناجابه‌جایی می‌توان به رویکرد کُن به‌فرضیهٔ ریمان، تحقق طیفیِ صفرهای تابع زتا از طریق فضای ناجابه‌جاییِ Qـمشبکه‌ها (کار مشترک با مارکولی)، و نیز کار کُن (با همکاری کرایمر) در زمینهٔ شالودهٔ ریاضی باز بهنجارش در نظریهٔ میدان کوانتومی به‌عنوان تناظر ریمان‌ـهیلبرت اشاره کرد. این دستاوردها مباحثی از فیزیک انرژی بالا را که به‌طور تجربی آزموده شده‌اند به‌نظریهٔ اعداد و هندسهٔ جبری پیوند می‌دهد. در واقع، کار بعدی کُن (با همکاری مارکولی) پرده از چهرهٔ یک گروه گالوای موتیویک، نهفته در میدان کوانتومی، برداشت که کارتیه آن را حدس زده و گروه گالوای کیهانی(cosmic) نامیده بود. این نتایج، هندسهٔ ناجابه‌جایی را به‌حوزه‌های مرکزی نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، و فیزیک انرژی بالا بسیار نزدیکتر کرده و موضوع مطالعات گسترده‌ای در سال‌های آتی خواهد بود.

اما اینها همهٔ داستان نیست و در واقع اکنون که تنها ۲۵ سال از ابداع این ایده‌ها می‌گذرد می‌توانیم مثال‌های فراوانی در این زمینه بیاوریم! با آزادی جدیدی که از امکان انتخاب شقِ ناجابه‌جایی به‌عنوان یک گزینهٔ ممکن و عملی ناشی می‌شود خوانندهٔ این مقاله می‌تواند به‌موضوع مورد علاقهٔ خود در ریاضیات و یا فیزیک مراجعه کند و مثال‌ها و کاربردهای بیشتری پیدا کند!

ترجمهٔ **عصمت علی‌اکبر یزدی**

هندسهٔ ناجابه‌جایی از منظر یک فیزیکدان

محمدمهدی شیخ‌جباری*

در کارگاه «هندسهٔ ناجابه‌جایی» که در روزهای پایانی تابستان ۱۳۸۴ برگزار شد، علاوه بر ریاضیدان‌ها، تعداد قابل ملاحظه‌ای از فیزیکدان‌ها، از جمله اینجانب، شرکت داشتند زیرا محرک پیشرفتِ این شاخه از ریاضیات همواره ایده‌ها و انگیزه‌هایی بوده که از مسائل فیزیک نشأت گرفته‌اند.

در طول دورهٔ کارگاه این نکته روشن شد که ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها زبان و بعضاً فهمی متفاوت از مفاهیم این موضوع دارند و پیدا کردن زبانی مشترک برای بیان مفاهیم کاری دشوار و غیر بدیهی است. بنابراین تصمیم گرفتم از این فرصتی که مجلهٔ **اخبار** پژوهشگاه در اختیار من قرار داده استفاده کنم و با زبانی ساده به تبیین برداشت یک فیزیک‌دان از هندسهٔ ناجابه‌جایی بپردازم. نیازی به تصریح نیست که البته این دیدگاه شخصی من است و فیزیکدان‌های دیگر ممکن است برداشتی نزدیک ولی متفاوت داشته باشند. نظر خود را با طرح دو سؤال و پاسخگویی به‌آنها بیان می‌کنم.

۱. چرا فیزیکدان‌ها به هندسهٔ ناجابه‌جایی علاقه‌مند هستند؟

۲. ساختار هندسهٔ ناجابه‌جایی مورد نظر فیزیک چیست؟ و یا چگونه هندسهٔ ناجابه‌جایی را می‌توان در قالب فرمول‌بندی یک نظریهٔ فیزیکی به‌کار گرفت؟

برای پاسخگویی به این سؤالات، نخست مروری بر تاریخچهٔ فیزیک در قرن گذشته می‌کنیم. در سه دههٔ اول قرن بیستم دو تحول شگرف در فیزیک رخ داد (و ما هنوز منتظر سومین تحول بزرگ هستیم، شاید این تحول در بطن نظریهٔ ریسمان نهفته باشد؟!) یکی از این دو، فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی (QM) و دیگری نسبیت عام (GR) بود.[۱] در مورد اول نظریهٔ ریاضی راهگشایی که به‌کار گرفته شد جبر عملگرها و فضاهای هیلبرت که این عملگرها روی آنها عمل می‌کنند بود و در مورد دوم، هندسهٔ دیفرانسیل و خمینه‌ها. هرچند مفهوم توپولوژی در فرمول‌بندی نسبیت عام ظاهر نمی‌شود و این نظریه فقط به خواص موضعی خمینه‌ها می‌پردازد.

نخست با مکانیک کوانتومی شروع کنیم. در مکانیک کلاسیک (مکانیک نیوتونی)، سیستم فیزیکی با یک پیکربندی در «فضای فاز»، فضایی که مختصات آن مکان‌ها و تکانه‌های ذرات سیستم هستند، توصیف می‌شود. این فضا دارای یک ساختار همتافته (symplectic) است که با کروشه‌های پواسون (Poisson brackets) داده می‌شود. در گذر از مکانیک کلاسیک به کوانتومی، این مختصات فضای فاز را به عملگرهایی بر فضای هیلبرت توابع L^2 روی R^3 ارتقا می‌دهیم و ساختار کروشهٔ پواسون را به‌جابه‌جاگر این عملگرها. در نتیجه عملگرهای متناظر با مختصات و تکانه با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند، یعنی فضای فاز در مکانیک کوانتومی یک فضای ناجابه‌جایی است، یک فضای ناجابه‌جایی با ساختار ساده که فضای Moyal نام دارد.

در فضای فاز هرچند مختصات و تکانهٔ یک ذره با هم جابه‌جا نمی‌شود، سه مؤلفهٔ مختصات با هم جابه‌جا می‌شوند. یعنی فضایی که ذرات در آن زندگی می‌کنند یا فضای واقعی پیرامون فضایی جابه‌جایی است. از نخستین روزهای فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی (از اواخر دههٔ ۱۹۴۰) فیزیکدان‌ها امکان و یا حتی لزوم داشتن فضای فازی را که مختصات آن، علاوه بر مختصات و تکانه، با هم ناجابه‌جایی باشند مد نظر قرار داده‌اند. این تلاش‌ها معمولاً متأثر از یک نتیجهٔ دیگر مکانیک کوانتومی یعنی نظریهٔ میدان‌های کوانتومی (QFT) بوده‌اند. نظریه‌های میدان‌های کوانتومی عموماً مبتلا به واگرایی‌ها یا بینهایت‌ها در سطح حلقه‌ها هستند و برای ترمیم و اصلاح آنها، از فرآیند «باز بهنجارش» استفاده می‌کنیم که شامل حذف بینهایت‌ها و واگرایی‌های ظاهر شده می‌شود (این کار را اصطلاحاً regularization می‌گویند). منشاء این بینهایت‌ها را می‌توان در این جستجو کرد که ما در فضاـزمان خود (یا در فضای تکانه‌ها) قادر به تمیز دادن فواصل با دقت بینهایت هستیم یعنی هیچ حدی بر کوچکترین فاصلهٔ قابل مشاهده وجود ندارد (به‌زبان تکانه هیچ حدی بر بزرگترین تکانهٔ ممکن وجود ندارد).[۲] برای حل این معضل ممکن است بگوییم خیلی خُب! بگذارید که شرط محدود نبودن قدرت تمیزدهی روی فواصل کوچک را برداشته و روی آن حدی بگذاریم. این دقیقاً همان اتفاقی است که عموماً به‌طور طبیعی در فضاـزمان‌های ناجابه‌جایی می‌افتد. و چون یک نظریهٔ فیزیکی باید عاری از بینهایت‌ها و این واگرایی‌ها باشد بنابراین فضاـزمان باید به‌طور ذاتی یک فضای ناجابه‌جایی باشد (این که دقیقاً کدام فضای ناجابه‌جایی، از این بحث مشخص نمی‌شود.)

دومین منشأ انگیزه و الهام برای هندسهٔ ناجابه‌جایی، نسبیت عام است که توصیف‌گر نیروی گرانشی است. سنگ‌بندی نسبیت عام بر این است که

حضور ماده در فضا خواص هندسی فضا (یعنی متریک آن) را عوض می‌کند. در نسبیت عام کلاسیک، فضاـزمان یک خمینهٔ کاملاً هموار است که متریک آن یک موجود دینامیکی است که از معادلات اینشتین تبعیت می‌کند. به‌بیانی دیگر، از دید نسبیت عام نیروی گرانشی به ساختار هندسی فضا مربوط می‌شود. از منظری دیگر، اما، نسبیت عام یک نظریهٔ میدان کلاسیک است که میدان دینامیکی آن متریک فضاـزمان است. برای این که این نظریه، قابلیت توصیف فواصل کوچک، دنیای کوانتومی، را داشته باشد، مثل هر نظریهٔ میدان دیگری، باید «کوانتیزه» شود. برخلاف بقیهٔ نظریه‌های میدان، کوانتیزه کردن نسبیت عام به‌سادگی امکان پذیر نیست و این دقیقاً به علت ناکارایی بازبهنجارش در مورد نظریهٔ کوانتومی نسبیت عام است و این واگرایی‌های ظاهر شده در سطح حلقه‌ها قابل حذف از نظریه نیست.

مستقل از این‌که نظریهٔ «گرانش کوانتومی» چه باشد،[۳] اگر با همان ایدئولوژی نسبیت عام به این مسأله بنگریم، این نظریه باید توصیف‌گر یک فضاـزمان کوانتومی باشد. به‌خاطر بیاورید که در چند پاراگراف قبل بحث کردیم که کوانتومی کردن مکانیک کلاسیک متناظر با ناجابه‌جایی کردن فضای فاز است. در نتیجه فضاـزمان کوانتومی می‌تواند (البته نه لزوماً) به معنای فضاـزمان ناجابه‌جایی باشد.

اینها همه انگیزه‌هایی قوی برای تأیید هندسهٔ جابه‌جایی و ارتباط آن با طبیعت و جهان واقع فراهم می‌کند. اما واقعاً نمود ساختار هندسهٔ ناجابه‌جایی در یک نظریهٔ فیزیکی چگونه است؟!

این البته سؤال سختی است و محققان متعددی در بین فیزیک‌دان‌ها و ریاضی‌ـفیزیک‌دان‌ها به‌تحقیق روی این سؤال مشغول‌اند. چون هنوز پاسخی به این سؤال بسیار بنیادی را نداریم، بگذارید با تبیین دیدگاه یک فیزیک‌دان دربارهٔ اینکه فضای ناجابه‌جایی چه‌چیزی می‌تواند باشد، به‌بحث در مورد پاسخ‌های ممکن بپردازیم. دست آخر هم مقایسهٔ مختصری با دیدگاه یک ریاضی‌دان خواهیم داشت.

به‌دلیل اینکه بررسی فضاهای فشرده ساده‌تر است ابتدا فضاهای فشرده با گروه ایزومتری بزرگ را بررسی می‌کنیم. به‌عنوان مثال، مورد چنبره T^2 و کرهٔ دوبعدی S^2 را در نظر بگیرید.

در مورد این فضاها گروه ایزومتری آن قدر بزرگ است که می‌توان هر دو نقطه روی فضا را تحت گروه ایزومتری به هم مربوط کرد. این گروه در مورد چنبره، گروه ایزومتری انتقال روی صفحهٔ R^2 است و در مورد S^2، گروه دوران $SO(3)$. (در مورد این فضاها گروه ایزومتری آن قدر بزرگ است که تحت عمل ایزومتری هر نقطه بینهایت بار دربرگرفته می‌شود.) به‌لحاظ فیزیکی «کوانتیزه کردن» این فضاها به‌معنای پیدا کردن نمایش‌های خاص این گروه‌های ایزومتری می‌شود به‌نحوی که عناصر بنیادی این نمایش‌ها با همدیگر جابه‌جا نمی‌شوند. در این جا دو حالت امکان دارد: یا بُعد این نمایش‌ها نامتناهی است یا متناهی. اگر این گروه ایزومتری نمایشی با بُعد متناهی داشته باشد فضا یک فضای ناجابه‌جایی خاص است که در واژگان فیزیک «فضای فازی» (fuzzy space) نامیده می‌شود.

ابتدا با مثال چنبره شروع کنیم. چنبره با عمل انتقال روی $\mathbb{R}^2$ ساخته می‌شود. اگر فضای $\mathbb{R}^2$ را با مختصات x^1, x^2 پارامتربندی کنیم، داریم

$$X^i \equiv X^i + 2\pi R^i, \quad i = 1, 2.$$

(به‌عبارت دیگر $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.) عملگر انتقال در جهت X^1, X^2 به‌اندازهٔ R^1, R^2 را به‌ترتیب با U, V نشان می‌دهیم، یعنی:

$$UX^1V^{-1} = X^1 + 2\pi R^1, \quad VX^1V^{-1} = X^1, \qquad (1)$$

$$VX^2V^{-1} = X^2 + 2\pi R^2, \quad UX^2U^{-1} = X^2. \qquad (2)$$

U و V گروه انتقال روی چنبره را پارامتربندی می‌کنند. با وجود معادلات (۱) و (۲) هنوز آزادی انتخاب روی جابه‌جاگر U و V را داریم، یعنی:

$$UV = e^{i\theta} VU. \qquad (3)$$

می‌توان یک قدم جلوتر رفت و U و V را برحسب مختصات X^i حل کرد. بدین‌منظور باید مختصات X^i را به‌دو عملگر (خود دوگان یا هرمیتی) که روی فضای توابع L^2 روی $\mathbb{R}^2$ عمل می‌کنند ارتقا دهیم به‌قسمی‌که طیف عملگر X^i همان مختصات متعارف X^i را به‌دست می‌دهند. بلافاصله دیده می‌شود که

$$U = e^{i\frac{\theta}{2\pi R^2}X^2}, \quad V = e^{-i\frac{\theta}{2\pi R^1}X^1}, \qquad (4)$$

که در آن

$$[X^1, X^2] = i\frac{V}{\theta}, \qquad (5)$$

که عملگر یکانی در این جبر عملگرهاست و $V = (2\pi R^1)(2\pi R^2)$ حجم چنبره، و جواب معادلات (۱) و (۲) و (۳) است. همان‌طورکه به‌وضوح دیده می‌شود مختصات X^1, X^2 روی یک چنبرهٔ ناجابه‌جایی واقعاً ناجابه‌جایی هستند!! به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که معادلهٔ (۳) جواب‌هایی با بُعد متناهی دارد اگر θ یک عدد گویا باشد. اگر $\theta = \frac{P}{N}$، جواب‌هایی به‌صورت ماتریس‌های $N \times N$ داریم. در این حالت چنبره یک «چنبرهٔ فازی» نامیده می‌شود.

به‌عنوان مثال بعدی، کرهٔ S^2 را در نظر بگیرید و به یاد آورید که $S^2 \cong SU(2)/U(1)$. پس برای ساختن نسخهٔ ناجابه‌جایی کرهٔ دوبُعدی باید توجهٔ خود را روی جبر ایزومتری‌ها، یعنی $SU(2)$، متمرکز کنیم. همان‌طورکه می‌دانیم می‌توان کرهٔ S^2 را در $\mathbb{R}^3$ غوطه‌ور کرد. اگر مختصات را با X^i و $i = 1, 2, 3$ نشان دهیم و به‌علاوه همین X^i را می‌توان خودِ مولدهای گروه $SU(2)$ انتخاب کرد:

$$[X^i, X^j] = i \in^{ijk} X^k, \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \qquad (6)$$

که $\in^{ijk}$ ثابت ساختار گروه $SU(2)$ است، تانسور کاملاً پادمتقارن رتبهٔ سوم روی $\mathbb{R}^3$. برای تعریف کره باید «شعاع» آن را نیز تعریف کرد:

$$\sum_{i=1}^{3}(X^i)^2 = R^2.I, \qquad (7)$$

که I عملگر یکانی در گروه $SU(۲)$ است.

جواب معادلات (۶) و (۷) به‌صورت منحصر به فردی یک کرهٔ ناجابه‌جایی را تعریف می‌کند. این جواب در واقع یک نمایش تقلیل ناپذیر از جبر $SU(۲)$ است. از دیدگاه جبر $SU(۲)$ شعاع کره چیزی نیست جز مقدار کازیمیر (Casmir) مرتبهٔ دوم گروه $SU(۲)$ در آن نمایش مورد نظر این نمایش‌ها فقط با یک عددِ صحیح که بُعد نمایش مورد نظر است مشخص می‌شوند (بُعد نمایش هم شعاع را مشخص می‌کند.) چون تمام این نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر گروه $SU(۲)$ بُعد متناهی دارند حل معادلات (۶) و (۷) یک کرهٔ فضایی است.

به‌زبان ریاضیدان‌ها، فضای ناجابه‌جایی به‌وسیلهٔ جبر توابع روی فضا (که معمولاً یک جبر C^* است) تعریف می‌شود. اگر این جبر یک جبر ناجابه‌جایی باشد، با یک فضای ناجابه‌جایی سروکار داریم. ایزومترهای این فضای ناجابه‌جایی هم در واقع خودریختی‌های این جبر C^* است. اگر این جبر دارای نمایش‌های متناهی بُعد باشد یک «فضای فازی» را مشخص می‌کند. در مثال‌های مورد علاقهٔ ما فیزیکدان‌ها یک پارامتر که معمولاً پیوسته است وجود دارد و مقدار ناجابه‌جایی بودن فضا را کنترل می‌کند. مثلاً وقتی این پارامتر صفر می‌شود به‌یک فضای جابه‌جایی می‌رسیم. بدین معنا از دید یک فیزیکدان، فضای ناجابه‌جایی یک دگردیسی (deformation) از هندسهٔ معمول خمینه‌هاست. در دو مثال بالا این دگردیسی طوری انجام شده که گروه ایزومتری مربوط فضای جابه‌جایی و ناجابه‌جایی مربوط یکی هستند. هرچند در حالت کلی این امکان وجود دارد که این دگردیسی در فضا طوری باشد که گروه ایزومتری فضا را هم تغییر دهد. این شیوهٔ ساختن فضای ناجابه‌جایی به یک گروه بسیار بزرگتر از هندسه‌های ناجابه‌جایی می‌انجامد که هم فیزیکدان‌ها و هم‌ریاضیدان‌ها در حال حاضر به‌مطالعهٔ آنها مشغول هستند.

---

۱. جالب توجه است که در هر دو فرمول‌بندی، ابزار ریاضی مورد نیاز در آن زمان موجود نبود و این ابزار ریاضی به‌خاطر نیاز فرمول‌بندی‌های فیزیک و با همکاری نزدیک و مؤثر فیزیک‌دان‌ها ساخته شد.

۲. نظریه‌های میدانی هم وجود دارند که در آنها این واگرایی‌ها نه فقط از فواصل کوچک بلکه از فواصل بسیار بزرگ نیز نشأت می‌گیرند. در اینجا این نظریه‌ها را در نظر نمی‌گیریم.

۳. در حال حاضر با وجود دردست بودن چند نامزد مناسب برای گرانش کوانتومی هنوز یک نظریهٔ گرانش کوانتومی که فهم دقیقی از آن داشته باشیم در دسترس نیست.

* **محمدمهدی شیخ‌جباری**، عضو هیأت علمی پژوهشکدهٔ فیزیک.

معرفی کتاب

مسعود خلخالی، استاد دانشگاه انتاریوی غربی، از تاریخ ۱۵ فروردین ۱۳۸۳ به مدت یک ماه میهمان پژوهشکدهٔ ریاضیات بود. در طی این مدت، خلخالی دورهٔ درسی کوتاه مدتی تحت عنوان هندسهٔ ناجابه‌جایی، کوهمولوژی دوری، و جبر هوپف برگزار کرد. حاصل این دوره در پنجمین سری از مجموعه مقالات پژوهشگاه به چاپ رسیده است.

جهت اطلاعات بیشتر می‌توانید به‌وبگاه زیر

http://math.ipm.ac.ir/IPM/publications/books.jsp

مراجعه کنید.

Lecture Notes Series 5
Very Basic
Noncommutative Geometry
Masoud Khalkhali