هندسهٔ گروه‌های پراکنده

الکساندر ایوانف*

پایان کارِ رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی در حوالی سال ۱۹۸۰ اعلام شد. در حال حاضر اثبات کاملی از قضیهٔ رده‌بندی این گروه‌ها در یک رشته تکنگاشت توسط گورنشتاین (D. Gorenstein)، لیونز (R. Lyons)و سالومن (R. Solomon) زیر چاپ است. انتظار می‌رود که این مجموعه حدوداً شامل ۱۲ جلد باشد که تاکنون هفت جلد از آنها به چاپ رسیده است. در این زمینه اخیراً یک رسالهٔ دوجلدی کمکی که حدود ۱۴۰۰ صفحه دارد توسط اشباخر (M. Aschbacher) و اسمیت (St. Smith) انتشار یافته است. این رسالهٔ دوجلدی شامل یک طبقه‌بندی ازگروه‌های به‌اصطلاح سادهٔ متناهی شبه لاغر است که در اصل توسط میسن (G. Mason) اعلام شده است.

طبق رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی، چنین گروهی یا گروه متناوب Alt_n با درجهٔ $n \geq ۵$ است، یا گروه سادهٔ متناهی از نوع لی است (که این گروه‌ها معمولاً به حدود هفده رشتهٔ نامتناهی تقسیم می‌شوند) و یا یکی از بیست و شش گروه سادهٔ استثنایی (که نادر یا پراکنده نامیده می‌شوند) می‌باشد. مسلماً این تقسیم‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی به رشته‌ها و مثال‌های استثنایی درک فعلی ما از این چیزها را نشان می‌دهد و این تقسیم‌بندی ضرورتاً ویژگی ذاتی آنها نیست. کی‌جی اوگویزو (Keiji Oguiso) زمانی از من سؤال کرد که چطور می‌توان مستقل از تقسیم‌بندی کلی ثابت کرد که فقط تعدادی متناهی گروه سادهٔ پراکنده وجود دارد. من در پاسخ سعی کردم تعریفی ذاتی از یک گروه پراکنده و یا یک رشته گروه پراکنده ارائه دهم، اما نتوانستم. ممکن است کسی بتواند این کار را بکند.

بنابراین در موقعیت فعلی لازم است هر یک ازگروه‌های سادهٔ پراکنده جداگانه توصیف و شناسایی شوند. برخی از آنها به عنوان گروه‌های خودریختی دستگاه‌های اشتاینر (گروه‌های ماتیوی $M_{۲۴}$، $M_{۲۳}$، $M_{۲۲}$، $M_{۱۲}$، و $M_{۱۱}$) و گراف‌های بسیار منظم (گروه‌های هیگمن، سیمز، مک‌لاگلین، و رودولس) ظاهر می‌شوند، برخی از این گروه‌ها را (مثل گروه سوم جانکو $J_{۳}$) می‌توان بر اساس مولدها و روابط به‌خوبی توصیف کرد، و برخی دیگر از طریق ردهٔ تزویجی ۳ـ ترانهشی تولید می‌شوند (مثل گروه فیشر $Fi_{۲۴}$، $Fi_{۲۳}$، و $Fi_{۲۲}$). اما برخی ازگروه‌های دیگر مثل گروه‌های خودریختی شبکه‌های انتگرالی خاصی (مانند گروه‌های کانوی $Co_{۱}$، $Co_{۲}$، و$Co_{۳}$) از طریق محاسبات کامپیوتری فشرده و پیچیده ساخته می‌شوند (مثل گروه بچه هیولا یا Baby Monster). معروف‌ترین گروه سادهٔ پراکنده یعنی گروه هیولای M، گروه خودریختی یک جبر $V^\natural$ی جالب توجه بینهایت بعدی است (که عملگر رأسی نامیده می‌شود) و ابعاد مدرج آن دقیقاً ضریب‌های صورت معروف پیمانه‌ای $j(q)$ هستند. متأسفانه، چنین تعریفی از هیولا فقط از دورکامل به‌نظر می‌رسد و دلیل آن این است که

ساخت $V^\natural$ (موسوم به مدول مونشاین) به‌طور تعاملی از جبر به گروه برمی‌گردد به‌طوری که این گروه باید از قبل در دسترس باشد.

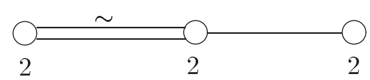
این رشته از سخنرانی‌ها به‌بررسی این رویکرد هندسی به گروه‌های سادهٔ متناهی (به‌ویژه پراکنده) می‌پردازد. طی سخنرانی‌های مشابه اغلب از من می‌پرسیدند که آیا هدف این موضوع، نسبت دادن یک هندسهٔ $\mathcal{G}$ به هر گروه سادهٔ متناهی G است تا G بتواند به‌عنوان (زیرگروهی خاص که به‌راحتی قابل شناسایی است در) گروه خودریختی $\mathcal{G}$ بازیافته شود. چون تعریف هندسه را می‌توان نسبتاً کلی بیان کرد (مثل مجموعه‌ای که روی آن «ساختاری» قرار دارد)، آن هدف به آسانی به‌دست می‌آید و بنابراین بی‌معناست. به‌عنوان مثال، $\mathcal{G}$ را (می‌توان به‌عنوان یک مجموعهٔ G) به همراه مجموعه‌ای از سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) در نظر گرفت به‌نحوی که در این مجموعهٔ G، $abc = ۱$. بنابراین، تعریف هدف این موضوع خیلی ساده نیست و بستگی به این ایدهٔ شهودی دارد که هندسهٔ «خوب» چه هندسه‌ای است.

من در تعریف هندسه‌های خوب می‌گویم که اصول موضوع آنها باید با رویکرد فعلی به‌طبقه‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی که مبتنی بر تحلیل باصطلاح pـموضعی است، سازگار باشد. بنابراین برای اجزاء هندسهٔ $\mathcal{G}$ وابسته به گروه G، ما هم‌مجموعهٔ زیرگروه‌های pـموضعی را در نظر می‌گیریم. یک زیرگروه P از G، p ـموضعی است (p عدد اول است) اگر $O_p(P) \neq ۱$. در اینجا $O_p(P)$ بزرگترین زیرگروه نرمال در P است که مرتبه‌اش توانی از عدد اول p است. در بین این اصول موضوع، ما ویژگی باصطلاح pـمقید را (که نقش مهمی در طبقه‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی ایفاء می‌کند) در فرمولبندی دوبارهٔ هندسی جا خواهیم داد. یک زیرگروه pـموضعی زمانی pـمقید است که $C_G(O_p(P)) \leq O_p(P)$. این ویژگی در هر زیرگروه ماکسیمال سهموی درگروه نوع لی با مشخصهٔ p وجود دارد.

من رویکرد خودمان را در مورد بزرگترین گروه ماتیو، $M_{۲۴}$، که به‌صورت گروه خودریختی دستگاه اشتاینر $S(۵, ۸, ۲۴)$ به بهترین وجه تعریف

می‌شود، نشان داده‌ام. چنین دستگاهی یک جفت $(\mathcal{P},\mathcal{B})$ است که $\mathcal{P}$ مجموعه‌ای با ۲۴ عضو و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های ۸ عضوی $\mathcal{P}$ (با نام هشت ضلعی) است که به‌ازای هر زیرگروه ۵ عضوی $\mathcal{T}$ از $\mathcal{P}$، هشت‌تایی یکتایی وجود دارد که شامل $\mathcal{T}$ است. چنین دستگاهی در حد یکریختی، یکتاست و (برخلاف مدول مونشاین برای هیولا) می‌توان آن را مستقل از گروه خود ماتیو تعریف کرد.

اگر همین شیوه را برای ساخت یک گروه از نوع لی به‌کار بریم و چنین ساختاری را برای گروه ماتیوی $M_{۲۴}$ تکرار کنیم، هندسهٔ $\mathcal{G}(M_{۲۴})$ را با نمودار زیر به‌دست می‌آوریم:



ماندهٔ رتبهٔ دوی متناظر با گوشهٔ منتها الیه سمت چپ نمودار، نشان دهندهٔ پوششی سه‌گانه از چهار ضلعی تعمیم داده شده مرتبهٔ $(۲,۲)$ مرتبط با توسیع غیر شکافندهٔ $۳۰\, Sym_۶ \cong ۳۰\, SP_۴(۲)$ است. بنابراین می‌توان گفت $\mathcal{G}(M_{۲۴})$ هندسهٔ تیلده از مرتبهٔ ۳ می‌باشد. هندسهٔ تیلدهٔ مرتبهٔ ۳ دیگر مرتبط با گروه He، Held است که با $M_{۲۴}$ در ساختار مرکز ساز یک اینولوشن (یک عضو مرتبهٔ ۲) شریک است. اولین گروه کانوی یعنی $Co_۲$ در هندسهٔ تیلده از مرتبهٔ ۴ عمل می‌کند در حالی‌که گروه هیولا در هندسهٔ مرتبهٔ ۵ عمل می‌کند.

هندسه‌های تیلده بسیار خوب از آب در آمدند. نظریهٔ آنها توسط هیس (St. Heiss)، پارکر (Ch. Parker)، رونان (M. Ronan)، رولی (P. Rowley)، اسمیت (St. Smith)، و استرات (G. Stroth) بسط داده شد. طبقه‌بندی کاملی از نظریهٔ آنها توسط اینجانب و اشپکتوروف (S.V. Shpectorov) انجام شد و به شرح زیر است:

قضیه. فرض کنید $\mathcal{G}$ یک هندسهٔ تیلده از مرتبهٔ $n \geq ۳$ باشد و G گروه خودریختی پرچم‌ـانتقالی از G باشد. در این صورت یکی از شرایط زیر برقرار است:

(۱) $n = ۳,\ G \cong M_{۲۴}$ یا $G \cong He$;

(۲) $n = ۴,\ G \cong Co_۱$;

(۳) $n = ۵,\ G \cong M$;

(۴) $G \cong ۳^{\sigma(n)}.\ S_{p۲n}(۲)$

(در اینجا $\sigma(n)$ تعداد زیرفضاهای دوبعدی از یک فضای n بعدی $GF(۲)$ است.)

اثبات این قضیه در حدود نیمی از رسالهٔ دوجلدی «هندسه و گروه‌های پراکنده»، قسمت‌های I و II را که توسط انتشارات کیمبریج به‌ترتیب در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۲ به‌چاپ رسیده است دربرمی‌گیرد.

******

* **الکساندر آ. ایوانف (ساشا)**، استاد امپریال کالج لندن (میهمان پژوهشکدهٔ ریاضیات در اردیبهشت‌ماه ۸۴ به‌مدت دوهفته). وی این مقالهٔ توصیفی را در ارتباط با سخنرانی‌های خود در پژوهشگاه نوشته است.

ترجمهٔ **عصمت علی‌اکبر یزدی**، پژوهشکدهٔ ریاضیات، پژوهشگاهِ دانشهای بنیادی.

گروه‌ها و زندگی روزمره

دانشجویی که درس جبر مجرد را در دورهٔ کارشناسی می‌گیرد معمولاً گمان می‌کند نظریهٔ گروه‌ها مبحثی است که چندان ارتباطی با زندگی روزمره ندارد. حال‌آنکه با نگاهی به اطراف می‌توان دید که گروه‌ها به‌طور طبیعی در بسیاری از اشیاء و پدیده‌ها و حرکت‌ها حضور دارند، از چرخ اتوموبیل و دوچرخه و کلیدهای برق در پلکان‌های خانه‌ها گرفته تا مسابقات اسب سواری و طرق مختلف دوران دادن یک متکا و مکعب روبیک و حل پازل‌ها. مثلاً راهروها و پلکان‌های منازل اغلب چراغ‌هایی دارند که با دو یا چند کلید خاموش و روشن می‌شوند به‌طوری که با زدن هر کلید، حالت چراغ از خاموش به روشن یا به‌عکس، تغییر می‌کند. گروه $Z_۲ \oplus Z_۲$ مدل وضعیتی است که تعداد کلیدها دوتا باشد. اگر سیمکشی طوری باشد که چراغ‌ها وقتی روشن باشند که هر دو کلید بالا یا هر دو کلید پایین باشند، می‌توان حالات دو کلید را متناظر با اعضای $Z_۲ \oplus Z_۲$ گرفت به طوری که قرار داشتن کلیدها در موقعیت «بالا» متناظر با $(۰,۰)$ و در موقعیت «پایین» متناظر با $(۱,۱)$ باشد. هر بار که کلیدی زده می‌شود، ۱ را به مؤلفهٔ متناظر $Z_۲ \oplus Z_۲$ می‌افزاییم. در نتیجه، چراغ‌ها وقتی روشن‌اند که کلیدها متناظر با اعضای زیرگروه $\langle(۱,۱)\rangle$ باشند، و خاموش‌اند اگر کلیدها متناظر با هم‌مجموعهٔ $(۱,۰) + \langle(۱,۱)\rangle$ باشند. مدلِ وضعیتی که سه کلید درکار باشد، گروه $Z_۲ \oplus Z_۲ \oplus Z_۲$ است به‌طوری که زیرگروه $\langle(۱,۱,۰),(۰,۱,۱)\rangle$ متناظر با حالتی است که چراغ‌ها روشن‌اند.

نقل از:

J. A. Gallian, *Groups in the Household*, Focus **25** (2005), 10-11.