هندسهٔ ناجابه‌جایی چیست؟

مسعود خلخالی نویسندهٔ این مقاله که استاد دانشگاه انتاریوی غربی در کانادا است از تاریخ ۱۵ فروردین ماه ۱۳۸۳ به‌مدت یک ماه میهمان پژوهشکدهٔ ریاضیات بود. خلخالی در مدت اقامت خود یک دورهٔ آموزشی کوتاه مدت با عنوان

Non-commutative geometry, cyclic cohomology, and Hopf algebra

در پژوهشکده برگزار کرد و سخنرانی‌های متعددی نیز در دانشگاه‌های مختلف ایراد نمود.

۱. مقدمه

یکی از کشفیات بزرگ علمی در قرن بیستم کشف مکانیک کوانتومی توسط هایزنبرگ در سال ۱۹۲۵ بود. از دیدگاه ریاضی، عبور از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی به منزلهٔ گذار از جبر جابه‌جایی مشاهده‌پذیرهای کلاسیک به جبرناجابه‌جایی مشاهده پذیرهای کوانتومی است. در حدود ۵۰ سال بعد، یک ریاضیدان فرانسوی به‌نام آلن کنُ دریافت که در هندسه و توپولوژی نیز می‌توان چنین مسیری را پیمود [۱، ۲، و ۳]. نظریهٔ جدید ایجاد شده قابلیت‌های شگرفی حتی در حل مسائل کلاسیک حل نشدهٔ هندسه، جبر، و توپولوژی دارد. نظریهٔ کنُ، که امروزه عموماً هندسهٔ ناجابه‌جایی خوانده می‌شود، ریشه‌های بسیار مستحکمی در قسمت‌های متنوعی از ریاضیات همچون آنالیز تابعی، جبر عملگرها روی فضاهای هیلبرت، نظریهٔ K، توپولوژی جبری، و هندسهٔ دیفرانسیل دارد. در این مقاله منظور ما از جبر یک جبر انجمنی روی یک هیأت (یا یک حلقهٔ جابه‌جایی) است، منظور از جبرجابه‌جایی جبری است که برای همهٔ اعضای a و b آن رابطهٔ $ab = ba$ برقرار است. هرگاه این رابطه الزاماً برقرار نباشد به آن جبر ناجابه‌جایی می‌گوییم.

برای فهم هندسهٔ ناجابه‌جایی باید نخست مفهوم فضای ناجابه‌جایی را فهمید. این مفهوم ریشه در یک دوگانی (duality) عمیق در ریاضیات دارد که در تمام تاریخ ریاضیات از ابتدا تاکنون دیده می‌شود و آن، تناظر بین زبان جبری و زبان هندسی است.

$$\text{جبر} \longleftrightarrow \text{هندسه}$$

برای ملاحظهٔ بحث کاملی در این زمینه، ر.ک. [Shafarevich].

به‌عنوان نمونه، در آنالیز تابعی قضیهٔ گلفاند_نایمارک می‌گوید که یک هم‌ارزی بین ردهٔ فضاهای فشردهٔ هاوسدورف از یک‌سو و جبرهای جابه‌جایی C^* یک‌دار از سوی دیگر وجود دارد:

$$\{\text{جبرهای جابه‌جایی } C^* \text{ یک‌دار}\} \longleftrightarrow \{\text{فضاهای فشردهٔ هاوسدورف}\}$$

بنابراین می‌توان فضاهای فشرده (و یا حتی موضعاً فشرده) را به زبانی کاملاً جبری مطالعه کرد. در این هم‌ارزی، به‌فضای فشردهٔ X جبر $C(X)$ متشکل از توابع پیوسته روی X با مقادیر در مجموعهٔ اعداد مختلط نسبت داده می‌شود.

بنابراین می‌توان مطالعهٔ جبرهای C^* ناجابه‌جایی را مطالعهٔ فضاهای ناجابه‌جایی دانست، اگرچه در حال حاضر تعریف دیگری از این فضاهای ناجابه‌جایی در دست نیست ولی همین تعریف نیز کاملاً دقیق و کافی است.

به‌عنوان مثالی دیگر، یادآوری می‌کنیم که طبق قضیهٔ سر_سوان (Serre-Swan) یک هم‌ارزی بین ردهٔ کلاف‌های برداری روی یک فضای فشردهٔ هاوسدورف X از یک سو و مدول‌های متناهی پروژکتیو روی جبر $C(X)$ از سوی دیگر، وجود دارد:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{مدول‌های متناهی}\\ \text{پروژکتیو روی } C(X)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{کلاف‌های برداری}\\ \text{روی } X\end{array}\right\}$$

در این تناظر به کلاف E روی X، $C(X)$_مدول مقاطع سراسری پیوستهٔ E نسبت داده می‌شود:

$$E \longmapsto \Gamma(E) = \{S;\ \text{مقطع سراسری پیوستهٔ } E \text{ } S\}$$

بنابراین قضیه، می‌توان یک مدول متناهی پروژکتیو روی یک جبر ناجابه‌جایی A را معادل ناجابه‌جایی یک کلاف برداری روی فضای ناجابه‌جایی تعریف شده توسط جبر A دانست. این دیدگاه به‌نتایج بسیار زیبایی در نظریهٔ Kی جبری و Kی توپولوژیک برای فضاهای ناجابه‌جایی منجر شده است: مثلاً بهترین قضیهٔ نظریهٔ Kی توپولوژیک برای فضاها، یعنی قضیهٔ تناوبی بوست (Bost)، به‌طورکامل به‌نظریهٔ Kی جبرهای باناخ توسعه می‌یابد.

جدول زیر به‌درک موقعیت کنونی هندسهٔ ناجابه‌جایی کمک می‌کند.

ناجابه‌جایی / کوانتومی	جابه‌جایی / کلاسیک
جبرهای C^*، جبرهای	فضاهای توپولوژیک
ناجابه‌جایی، جبرهای باناخ	
مدول‌های پروژکتیو متناهی	کلاف برداری
همولوژی دوری	کوهمولوژی دورام
نظریهٔ K و KK	نظریهٔ Kی توپولوژیک
نظریهٔ ناجابه‌جایی چرن-ویل	هموستار، انحنا، رده‌های مشخصه
سه‌تایی‌های طیفی	خمینه‌های ریمانی و اسپینی
جبر هوپف، گروه کوانتومی	گروه، عمل گروه، تقارن
همولوژی دوری جبرهای هوپف	کوهمولوژی گروه، جبرلی
قضیهٔ اندیس موضعی	قضیهٔ اندیس
کُن-مسکوویچ	

در اینجا باید به‌نکتهٔ مهمی اشاره کرد و آن اینکه یافتن معادل‌های ناجابه‌جایی نظریه‌های جابه‌جایی کار چندان ساده‌ای نیست. به‌ظاهر چنین به‌نظر می‌رسد که می‌توان ابتدا مفاهیم را به‌زبان جبرهای جابه‌جایی بیان کرد و سپس شرط جابه‌جایی بودن را حذف کرد. متأسفانه ــ یا خوشبختانه! ــ چنین روشی فقط در یک مورد کاربرد داشته و آن نظریهٔ K بوده است. در بقیهٔ موارد فهرست فوق، یافتن معادل‌های ناجابه‌جایی کاری بسیار مشکل و نابدیهی است. برای آشنایی بیشتر، مطالعهٔ مراجع [۱،۲،۳،۴،۵،۶] را پیشنهاد می‌کنیم.

در زیر به برخی از مهمترین موضوعات مطرح روز در هندسهٔ ناجابه‌جایی اشاره می‌کنیم. برای آشنایی عمیقتر با این موضوعات، خواننده می‌تواند به آثار و مقالات توصیفی کُن و مراجع مطرح شده در آنجا مراجعه کند.

۲. منابع فضاهای ناجابه‌جایی

بسیاری از فضاهای توپولوژیک مورد استفاده در ریاضیات به‌عنوان خارج قسمت یک فضای توپولوژیک نسبت به یک رابطهٔ هم‌ارزی (مثلاً تعریف شده توسط عمل یک گروه) تعریف می‌شوند. این فضاهای خارج قسمت به دو دسته تقسیم می‌شوند: خوب و بد. خارج قسمت‌های خوب آنهایی هستند که فضای خارج قسمت $X/\sim$ خواصی مشابه خواص X دارد. مثلاً اگر X هاوسدورف و یا هموار است، $X/\sim$ نیز هاوسدورف و یا هموار است. در غیر این‌صورت خارج قسمت را بد می‌دانیم. یک ایدهٔ اساسی کُن این است که به‌این خارج قسمت‌های بد می‌توان فضاهای ناجابه‌جایی مناسبی نسبت داد. با به‌کار بردن ابزارهای هندسهٔ ناجابه‌جایی می‌توان ناورداهای هندسی و توپولوژیک این فضاها را نیز مطالعه کرد. به این مفهوم، هندسهٔ ناجابه‌جایی، ابزارهای توپولوژی، هندسه و آنالیز را به‌فضاهای بسیار تکین تعمیم می‌دهد. مثال‌های چنین فضاهایی عبارت‌اند از:

i) فضای برگ‌های یک برگ‌بندی روی یک خمینه

ii) فضای نمایش‌های تحویل‌ناپذیر یک گروه (لی) نافشرده

iii) فضای آجرفرش‌های پنروز.

به‌عنوان منبع سرشار دیگری از فضاهای ناجابه‌جایی باید از کوانتش دگرشکلی (deformation quantization) خمینه‌های پوآسونی یاد کرد. بنابر یک قضیهٔ بسیار مشکل و عمیق از کونتسویچ (M. Kontsevich) (1997) هر خمینهٔ پوآسونی دارای یک کوانتش دگر شکلی است. جبرهای ناجابه‌جایی حاصل شده از چنین کوانتشی پیچیده‌ترین خواص خمینه‌های پوآسونی و از جمله خمینه‌های همتافته (symplectic) را در خود دارند. باور بسیاری از محققان در این رشته این است که مطالعهٔ هندسهٔ ناجابه‌جایی چنین جبرهایی، راهی جدید و ساده‌تر برای مطالعهٔ ناورداهای گروموف-ویتن (Gromov-Witten) خمینه‌های همتافته خواهد گشود.

۳. کوهمولوژی دوری و نظریهٔ K

کشف عمده‌ای که آلن کُن در سال ۱۹۸۱ به آن نائل شد، کشف کوهمولوژی دوری به‌عنوان معادل ناجابه‌جایی نظریهٔ همولوژی دورام و به‌عنوان فضای بُرد یک مشخصهٔ چرن ناجابه‌جایی از نظریهٔ K و نظریهٔ Kی همولوژیک بود. همراه با نظریهٔ K، نظریهٔ Kی همولوژیک و نظریهٔ KK، کوهمولوژی دوری بسیاری از جنبه‌های توپولوژی دیفرانسیل کلاسیک همچون نظریهٔ چرن-ویل (Chern-Weil) را به‌طور کامل به‌فضاهای ناجابه‌جایی تعمیم می‌دهد. دوگان‌دور (cocycle)های نظریهٔ دوری یک جبر A روی یک هیأت k به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C^n(A) := \mathrm{Hom}(A^{\otimes(n+۱)}, k),$$

که طرف راست، فضای تابعک‌های $(n+۱)$-خطی روی جبر A است. یک تابعک $\varphi: A^{\otimes(n+۱)} \to k$ دوری خوانده می‌شود اگر

$$\varphi(a_n, a_۰, \dots, a_{n-۱}) = (-۱)^n \varphi(a_۰, \dots, a_{n-۱}, a_n),$$

به‌ازای هر $a_۰, \dots, a_n$ در A. زیر فضای $(n+۱)$-تابعک‌های دوری را با $C^n_\lambda(A)$ نمایش می‌دهیم.

عملگر مرز $b: C^n(A) \to C^{n+۱}(A)$ با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}(b\varphi)(a_۰, \dots, a_{n+۱}) = \\ \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^i \varphi(a_۰, \dots, a_i a_{i+۱}, \dots, a_{n+۱}) \\ +(-۱)^{n+۱}\varphi(a_{n+۱}a_۰, a_۱, \dots, a_n).\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که اولاً $b^۲ = ۰$ و ثانیاً عملگر b روی زیر فضاهای $C^n_\lambda(A)$ خوش تعریف است.

کوهمولوژی همبافت $(C^\bullet_\lambda(A), b)$، کوهمولوژی دوری A خوانده می‌شود، در حالی که کوهمولوژی همبافت $(C^\bullet(A), b)$ کوهمولوژی هوخشیلد A با ضرایب در $A^* = \mathrm{Hom}(A, k)$ است. این کوهمولوژی‌ها

را به‌ترتیب با $HC^n(A)$ و $HH^n(A)$ نمایش می‌دهیم. یکی از قضایای اصلی اولیه درکوهمولوژی دوری دنبالهٔ دقیقِ طولانی کُن است:

$$\ldots \longrightarrow HC^n(A) \xrightarrow{S} HC^{n+2}(A) \xrightarrow{I} HH^{n+2}(A) \xrightarrow{B} HC^{n+1}(A) \longrightarrow \ldots .$$

رابطهٔ بین کوهمولوژی دوری و همولوژی دورام با قضیهٔ زیر از کُن مشخص می‌شود.

فرض کنید $A = C^\infty(M)$ جبر توابع هموار روی یک خمینهٔ فشرده و هموار باشد. آنگاه کوهمولوژی دوری پیوستهٔ A از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$HC^n(A) \cong \ker\, d \oplus H^{dR}_{n-2i}(M).$$

در رابطهٔ فوق، $H^{dR}_{\bullet}(M)$ همولوژی جریان‌های دورام روی M است و d عملگر مرز روی جریان‌های دورام.

همولوژی دوری برای جبرهای ناجابه‌جایی زیادی همچون جبر گروه‌ها و جبر توابع روی چنبره‌های ناجابه‌جایی محاسبه شده‌اند. مراجع [۱،۲،۳،۴،۵،۶] منابع خوبی برای کوهمولوژی دوری هستند.

۴. قضیهٔ اندیس اتیاـسینگر و هندسهٔ ناجابه‌جایی

قضیهٔ اندیس اتیاـسینگر و تعمیم‌های آن به‌کلاف‌های تاری و برگ‌بندی ها و به فضاهای تکین در ایجاد و گسترش هندسهٔ ناجابه‌جایی نقش عمده‌ای ایفا کرده است. یک قضیهٔ اندیس مدرن، قضیهٔ اندیس موضعی کُن و مسکوویچی (Moscovici) است. این قضیه مربوط است به «سه‌تایی‌های طیفی» (A, H, D) که در آن A جبری است که روی فضای عملگرهای خطی روی یک فضای هیلبرت H عمل می‌کند، و $D : H \longrightarrow H$ یک عملگر خودالحاق است. این سه‌تایی‌ها در شرایطی که تعمیم شرایط عملگرهای بیضوی روی خمینه‌های فشرده هستند، صدق می‌کنند. از کارهای اتیا، براون‌ـداگلاس‌ـفیلمور (Brown-Douglas-Fillmour) و کاسپاروف (Kasparov) معلوم شده است که سه‌تایی‌های طیفی را می‌توان به‌صورت دوگان‌دورهای یک نظریهٔ همولوژیک که دوگان نظریهٔ K است در نظر گرفت. قضیهٔ کُن‌ـمسکوویچی مشخصهٔ چرن این ردهٔ Kـهمولوژی را درکوهمولوژی دوری A به‌دست می‌دهد. موضعی بودن این فرمول بدین معنی است که در حالت کلاسیک این فرمول تنها به‌جرم هستهٔ گرمایی عملگر D در روی قطر $M \times M$ بستگی پیدا می‌کند، از جمله تحت اختلال‌های هموار فشردهٔ D ناورداست. این امر محاسبهٔ این دوگان‌دور را بسیار تسهیل می‌کند.

۵. هندسهٔ ناجابه‌جایی و نظریهٔ اعداد

کاربردهای کنونی هندسهٔ ناجابه‌جایی را در نظریهٔ اعداد می‌توان به‌چهار دسته تقسیم کرد: (۱) دستاورد کُن و بوست که تابع زتای ریمان $\eta(\beta)$ را به‌صورت تابع افراز یک سیستم دینامیکی ناجابه‌جایی به‌دست می‌دهد. آنها نشان دادند که در $\beta = 1$ تقارن این سیستم نقض می‌شود. گروه تقارن این سیستم گروه ایدل‌ها (ideles) است که با گروه گالوای $\mathrm{Gal}(Q^{ab}/Q)$ یکریخت است. این نظریه توسط افراد دیگری به‌تمام توابع زتای ددکیند، توسیع‌های آبلی اعداد جبری تعمیم داده شده‌اند.

(۲) کارِ کُن در زمینهٔ حدس ریمان: شروع این کار یک فرمول اثر (trace) است که فرمول اثر آرتر‌ـسلبرگ (Arthur-Selberg) را تعمیم می‌دهد. قضیهٔ اصلی کُن در اینجا این است که این فرمول اثر برقرار است اگر و تنها اگر حدس ریمان برای تمامی Lـتابع‌های یک هیأت جبری k برقرار باشد. (۳) کارکُن‌ـمسکوویچ در زمینهٔ تقارن‌های کوانتومی جبرهای هکهٔ (Hecke) مدولار $A(\Gamma)$: آنها نشان دادند که جبر هوپفِ کُن‌ـمسکوویچی به‌طور طبیعی روی $A(\Gamma)$ عمل می‌کند. در اینجا Γ یک همنهشتی زیر گروه $SL(2,\mathbb{Z})$ است. آنچه که بسیار تعجب انگیز است این است که جبر هوپف H_1 به‌عنوان تقارن کوانتومی برگ‌بندی‌ها با نقص بعد ۱ نیز عمل می‌کند. (۴) کارهای اخیر منین (Manin)، مارکولی (Marcolli)، کونزانی (Consani) دنینگر (Deninger) که رابطهٔ نزدیکی بین هندسهٔ آراکلوف (Arakelov) در نقاط بینهایت و هندسهٔ ناجابه‌جایی ایجاد کرده است.

۶. حدس باوم‌ـکُن (Baum-Connes)

این حدس، در ساده‌ترین حالت خود، برای هرگروه توپولوژیک موضعاً فشردهٔ G بیان شده است و پیش‌بینی می‌کند که نظریهٔ Kی گروه‌ـجبر C^* تعریف شده توسط G، با نظریهٔ Kی همولوژیک فضای رده‌بندی‌کنندهٔ مناسبی برای G یکریخت است. به‌عبارت دیگر ناورداهایی که توسط هندسهٔ ناجابه‌جایی و توسط توپولوژی جبری کلاسیک به یک گروه نافشرده نسبت داده می‌شوند با هم یکریخت‌اند. حدس نوویکوف (Novikov) دربارهٔ ناوردایی هموتوپیک نشان (signature)های بالاتر یک خمینهٔ غیر ساده‌ـهمبند از حدس باوم‌ـکُن نتیجه می‌شود (گروه مربوط در اینجا گروه هموتوپی اول M، $\pi_1(M)$ است).

۷. هندسهٔ ناجابه‌جایی و فیزیک

گرچه گذار از توپولوژی و هندسهٔ کلاسیک به هندسهٔ ناجابه‌جایی به‌طور شگفت‌آوری به‌گذار از مکانیک کلاسیک به‌مکانیک کوانتومی شباهت دارد، این تشابه در توسعهٔ هندسهٔ ناجابه‌جایی نقش چندانی بازی نکرده بود. اما کارهای کُن و همکاران او روی نظریهٔ یانگ‌ـمیلز ناجابه‌جایی، نظریهٔ استاندارد ذرات بنیادی، توجه بسیاری از فیزیکدانان را به‌خود جلب کرد. این علاقه و توجه در سال‌های اخیر با کشف روابط جالبی بین فشرده‌سازی‌های نظریهٔ ریسمان، نظریهٔ M، هندسهٔ ناجابه‌جایی، چنبره‌های ناجابه‌جایی (توسط کُن‌ـداگلاس‌ـشوارتس) دو چندان شده است. اکنون حتی انتظار می‌رود که در اثبات کامل تقارن آینه‌ای همولوژیک کونتسویچ، هندسهٔ

ناجابه‌جایی نقش عمده‌ای بازی کند. در واقع اکنون در ساده‌ترین اثبات‌های واقعاً ریاضی و قابل اعتماد این اصل برای چنبره‌های کلاسیک، از هندسهٔ چنبره‌های ناجابه‌جایی استفاده می‌شود. اصل تقارن آینه‌ای همولوژیک که اثبات آن یکی از دلمشغولی‌های اصلی ریاضیدانان در هندسهٔ جبری و رشته‌های نزدیک به آن است، پیش‌بینی می‌کند که رستهٔ استخراج شده از بافه‌های شبه‌منسجم روی یک واریتهٔ تصویری مختلط، هم‌ارز است با یک رستهٔ (هنوز تعریف نشده!) از زیر خمینه‌های لاگرانژی یک خمینهٔ همتافتهٔ (حدسی!) موسوم به آینهٔ خمینهٔ اصلی. به‌عنوان اولین قدم، اکنون باید به‌دنبال رویه‌های $K3$ ناجابه‌جایی یا حتی رویه‌های کالابی-یائو (Calabi-Yau) ناجابه‌جایی بود. آنچه در اینجا به ما امید می‌دهد این حقیقت است که به یک مفهوم، رویه‌های $K3$ تعمیم خم‌های بیضوی به بعد بالاتر هستند و خم‌های بیضوی در حال حاضر به‌خم‌های بیضوی ناجابه‌جایی تعمیم داده شده‌اند.

******

منابع:

1. **A. Connes**, *C^*-algebra et geometrie differentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **290** (1980), 599-604.
2. **A. Connes**, *Non-commutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257-360.
3. **A. Connes**, *Non-commutative Geometry*, 1st edition, Academic Press, San Diego, 1994.
4. **J. Cuntz** and **M. Khalkhali**, *Cyclic cohomology and non-commutative geometry*, in: Proceedings of the Workshop held in Waterloo, June 14-18, 1995, Fields Institute Communications 17, American Mathematical Society, Providence, 1997. Études Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257-360.
5. **J.L. Loday**, *Cyclic Homology*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
6. **I.R. Shafarevich**, *Basic Notions of Algebra*, 1st edition, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

آگهی ارائهٔ درس

- **کریپکی: دلالت، ضرورت و ذهن**

  مدرس: حمید وحید

  زمان: ۱۱ مهرماه تا ۱۲ دیماه ۱۳۸۳، شنبه‌ها (یک هفته در میان) ۱۶_۱۴

- **کل‌گرایی معنایی**

  مدرس: مهدی نسرین

  زمان: ۱۳ مهرماه تا ۱۴ دیماه ۱۳۸۳، دوشنبه‌ها ۱۶_۱۴

  رئوس مطالب:

  معرفی مفاهیم، کواین: کل گرایی معنایی و کل گرایی تاییدی، دیویدسون: کل گرایی معنایی و تعبیر رادیکال، لوئیس: کل گرایی معنایی و اولویت باور، دنت: کل گرایی معنایی و حیث التفاتی، بلاک: کل گرایی معنایی و معناشناسی نقش‌های مفهومی، چرچلند: معناشناسی عصب شناسانه، و نتیجه‌گیری.

******

مکان: پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکدهٔ فلسفهٔ تحلیلی
(انتهای نیاوران، جمال آباد، خیابان جبلی، کوچه چناران، پلاک ۹، طبقه همکف)
علاقه‌مندان می‌توانند برای کسب اطلاع بیشتر و ثبت‌نام اولیه در ساعات اداری با پژوهشکدهٔ فلسفهٔ تحلیلی ۲۲۸۷۱۷۸، تماس حاصل نمایند.
دانشجویان می‌توانند با موافقت دانشکده‌های مربوطه این درس را به‌عنوان یک درس سه واحدی اختیاری در مقطع کارشناسی ارشد اخذ کنند.