ساخت ماتریس آدامار از مرتبهٔ ۴۲۸

سرانجام ماتریس آدامار مرتبهٔ ۴۲۸ در مرکز محاسبات علمی پژوهشکدهٔ ریاضیات ساخته شد. سازندگان آن، هادی خرقانی و بهروز طایفه رضایی هستند.

هادی خرقانی استاد دانشگاه لثبریج در کانادا است که از ۸ بهمن ۱۳۸۲ میهمان پژوهشکدهٔ ریاضیات بوده و علاوه بر تحقیق در زمینهٔ ماتریس آدامار، در سمینار هفتگی ترکیبیات و محاسبه نیز سخنرانی کرده است.

بهروز طایفه‌رضایی محقق پُست‌دکتری پژوهشکدهٔ ریاضیات است.

از راست: هادی خرقانی و بهروز طایفه‌رضایی

ژاک آدامار، ریاضیدان نامی فرانسوی، در سال ۱۸۹۳ مسألهٔ تعیین ماتریس‌های حقیقی با ماکسیمم دترمینان را مورد مطالعه قرار داد. فرض کنید A یک ماتریس مربع حقیقی از مرتبهٔ n باشد به‌طوری که ماکسیمم قدر مطلق درایه‌های آن یک است. بزرگترین مقدار دترمینان A چه می‌تواند باشد؟ به‌سادگی می‌توان دید از آنجا که طول هر بردار ستونی در A حداکثر $\sqrt{n}$ است این مقدار از $n^{\frac{n}{2}}$ تجاوز نمی‌کند. آدامار ماتریس‌هایی را مورد بررسی قرار داد که دترمینان آنها برابر $n^{\frac{n}{2}}$ بود. وی نشان داد که چنین ماتریس‌هایی باید متعامد بوده، درایه‌های آنها ۱ و ۱− و مرتبهٔ آنها ۱، ۲ و یا مضربی از ۴ باشد. آدامار به‌علاوه این ماتریس‌ها را به‌ازای مرتبه‌های ۱۲ و ۲۰ ساخت. البته باید گفت این ماتریس‌ها که بعداً به‌ماتریس‌های آدامار معروف شدند سال‌ها قبل توسط سیلوستر مطرح شده بودند.

ماتریس‌های آدامار یکی از زمینه‌های مهم تحقیق در ترکیبیات است. این ماتریس‌ها بعد از جنگ جهانی دوم، مورد استفادهٔ فراوانی در عمل پیدا کرده‌اند. یکی از موارد استفاده جالب این ماتریس‌ها، در کد گذاری تصاویری است که توسط سفینه‌ها از سیارات دیگر ارسال می‌شود. علاوه بر نظریهٔ کدگذاری، این ماتریس‌ها در نظریهٔ رمزنگاری، پردازش سیگنال‌ها، نظریهٔ طرح‌ها، آزمایش‌های آماری و غیره کاربرد فراوان دارند.

مسألهٔ وجود ماتریس‌های آدامار از هر مرتبه‌ای که مضرب ۴ باشد به‌حدس آدامار معروف شده است. در سال ۱۹۳۳، پی‌لی (Paley) نشان داد که به‌ازای هر توان اول q و هر عدد صحیح مثبت m، ماتریس‌های آدامار از مرتبه‌های $2^m(1+q)$ وجود دارند. پی‌لی فهرستی شامل اعداد ۹۲، ۱۱۶، ۱۵۶، ۱۷۲، ۱۸۴، ۱۸۸ تهیه کرد که همهٔ مرتبه‌های حل نشده کمتر از ۲۰۰ را در برداشت. ویلیامسن در سال ۱۹۴۴، روش جدیدی برای ساخت ماتریس‌های آدامار ارائه داد که بعدها به صورگوناگون تعمیم یافت. ایدهٔ ویلیامسن در اصل ساده است. برای آنکه آرایهٔ ماتریس

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & D & -C \\ -C & -D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix}$$

متعامد باشد باید (الف) $AA^t + BB^t + CC^t + DD^t = 4nI$ و (ب) $XY^t = YX^t$، به‌ازای هر زوج Y, X به‌طوری‌که $X, Y \in \{A, B, C, D\}$. ویلیامسن ماتریس‌های A، B، C و D را دوری و متقارن در نظرگرفت و توانست ماتریسی آدامار از مرتبهٔ ۱۷۲ بسازد. مارشال هال و همکارانش در ۲۷ سپتامبر ۱۹۶۱ با یک ساعت محاسبهٔ کامپیوتری توانستند با روش ویلیامسن، یک ماتریس آدامار از مرتبهٔ ۹۲ به‌دست آورند. در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ رده‌های نامتناهی فراوانی از ماتریس‌های آدامار ساخته شد. اولین نتیجهٔ مجانبی در سال ۱۹۷۶ به‌دست آمد. در این سال سی‌بری (Seberry) نشان داد که ماتریس‌های آدامار مرتبهٔ $2^t n$ به‌ازای هر $t > 2\log_2(n-3)$ وجود دارند. کوچکترین ماتریس آدامار ناشناخته در دههٔ ۷۰، از مرتبهٔ ۲۶۸ بود. در سال ۱۹۸۵، سوده (Sawade) با جستجوی کامپیوتری، موفق به‌ساخت این ماتریس شد و به‌این ترتیب ماتریس‌های آدامار از مرتبه‌های کوچکتر از ۴۲۸ معلوم شدند.

در طی ۲۰ سال گذشته همزمان با پیشرفت‌های گوناگون در زمینهٔ ماتریس‌های آدامار، گروه‌های متعددی در نقاط مختلف دنیا، تلاش‌های زیادی برای ساخت ماتریس آدامار از مرتبهٔ ۴۲۸ به‌عمل آوردند اما ناموفق بودند. این ماتریس اخیراً در مرکز محاسبات علمی پژوهشکدهٔ ریاضیات ساخته شد. روش ساخت به‌کار رفته، بر اساس دنباله‌هایی از نوع تورین است. به‌عبارت دیگر، باید چهار دنباله با درایه‌های ۱ و ۱− و با طول‌های ۳۶، ۳۶، ۳۶، و ۳۵ پیدا کرد به‌طوری که مجموع ضرایب خودبستگی نامتناوب (nonperiodic autocorrelation) این دنباله‌ها برابر صفر باشد. با استفاده از این دنباله‌ها، چهار ماتریس دوری از مرتبهٔ ۱۰۷ پیدا می‌شود که با قرار دادن در آرایه‌ای نظیر آرایهٔ ویلیامسن ماتریسی آدامار از مرتبهٔ ۴۲۸ به‌دست می‌آید. علاوه بر این ماتریس، تعداد زیادی ماتریس آدامار نیز ساخته می‌شود که قبلاً نامعلوم بوده‌اند.

محاسبات برای جستجوی دنباله‌های فوق با یک ابررایانهٔ خوشه‌ای شامل ۱۶ رایانهٔ شخصی ۲٫۶ گیگاهرتزی انجام شد که پس از حدود ۱۲ ساعت، جوابی به‌دست آمد. ماتریس ساخته شده و مقالهٔ مربوط که در آن روش ساخت شرح داده شده در نشانی زیر قابل دسترسی است:

http://math.ipm.ac.ir/tayfeh-r/research.htm.

حال کوچکترین ماتریس آدامار نامعلوم، از مرتبهٔ ۶۶۸ است.