ویژه‌مقدارهای عملگر لاپلاسی

ویژه‌مقدارهای عملگر لاپلاسی، در ساده‌ترین شکل خود، نشان دهندهٔ بسامدها [فرکانسها]ی ارتعاش یک تار یا پوستهٔ یک طبل هستند. تعابیر فیزیکی عمیقترِ ویژه‌مقدارها مبتنی بر مفاهیم نظریهٔ پراکندگیِ امواج الکترومغناطیسی و مشاهده پذیرها در مکانیک کوانتومی است. لورنتس (H.A. Lorentz) در سال ۱۹۱۰ در یک سخنرانی در گوتینگن، حدس شایان توجهی دربارهٔ رابطهٔ مجانبیِ مُدهای ارتعاشات یک غشای دوبعدی با مرز ثابت و مساحت سطح غشاء مطرح کرد. وی بر اساس ملاحظات فیزیکی حدس زد که برای یک چنین غشای Ω داریم:

$$N(r) \cong \frac{r}{4\pi}\mathrm{Area}(\Omega), \quad r \to \infty \text{ وقتی}$$

که در آن Area مساحت غشاء و $N(r)$ تعداد ویژه‌مقدارهای $\lambda \leq r$ عملگر لاپلاسی $\Delta = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ است. ایدهٔ لورنتس در آن زمان آنقدر تازگی داشت که داوید هیلبرت گمان می‌کرد شاهد اثبات آن در دورهٔ حیاتش نخواهد بود. ولی هرمان وایل مدت کوتاهی بعد از آن (۱۹۱۱) اثباتی برای حدس لورنتس ارائه داد.

مارک کاتس (Mark Kac) در سال ۱۹۶۶ در مقاله‌ای با عنوانِ کنجکاوی برانگیزِ «آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟» این مسأله را مطرح کرد که آیا با اطلاع از همهٔ ویژه‌مقدارهای غشاء [پوسته] Ω می‌توان شکل طبل را به‌طور یکتا مشخص کرد یا خیر. او به‌خصوص نشان داد که اطلاع از ویژه‌مقدارها نه تنها مساحت Ω بلکه طول خم مرزی آن را نیز معین می‌کند. مسائلی با این خصیصه، که در آنها تعیین هندسهٔ یک شئ از روی مشاهده‌پذیرها (یعنی ویژه‌مقدارهای یک عملگر) مورد نظر است، معمولاً مسائل طیفی وارون نامیده می‌شوند. پیشرفت قابل توجهی در این زمینه به‌دست آمده است و ما مثلاً می‌دانیم که پاسخ پرسش کاتس منفی است. طبلهای متمایزی با مدهای ارتعاش یکسان پیدا شده‌اند و این مسأله و قضایایی مربوط به آن به‌ابعاد بالاتر و به‌خمینه‌های ریمانی تعمیم یافته‌اند.

تا همین اواخر، حتی محاسبهٔ چند ویژه‌مقدار اول عملگر لاپلاسی، به‌جز در حالات خیلی خاص، غیر ممکن بود. با پیشرفت توان محاسباتی و تکنیکهای نوین آنالیز عددی، امکان محاسبهٔ کارآمدِ تعداد ویژه‌مقدارهای Δ فراهم شده است. البته محاسبهٔ همهٔ ویژه‌مقدارها برای یک دامنهٔ کلی ممکن نیست. ولی این واقعیت که چندین (حدوداً تا چهل) ویژه‌مقدار را می‌توان به‌طرز قابل اعتمادی محاسبه کرد، مسائل ریاضی جالبی را مطرح ساخته است. مثلاً آیا می‌توانیم اثر تغییر هندسهٔ Ω را بر توزیع چند ویژه‌مقدار نخست به‌طور بصری نمایش دهیم؟ از تحلیل کاتس چنین بر می‌آید که اگر مساحت دامنه ثابت نگه داشته شود ولی طول مرز مجاز باشد که افزایش یابد، ویژه‌مقدارها پراکنده‌تر می‌شوند. این حکم کیفی را خمهای شکل ۱۳، که متناظر با دامنه‌ها (غشاها)ی شکل ۱۴ هستند، به‌خوبی نشان می‌دهند. در حدس اولیهٔ لورنتس، توزیع ویژه‌مقدارهای بزرگ، که دربارهٔ آنها اطلاعات بسیار اندکی داریم، تعیین کنندهٔ مساحت پوستهٔ طبل است. در اینجا این سئوال را مطرح می‌کنیم که با اطلاع از چند ویژه‌مقدار نخست، با چه دقتی می‌توان مساحت، طول مرز و تعداد سوراخها در Ω را معین کرد. به‌هر حال فقط چند ویژه‌مقدار نخست را می‌توانیم به‌صراحت محاسبه کنیم. تحقیق ما در پژوهشگاه دانشهای بنیادی نشان می‌دهد که دلیلی برای خوشبینی وجود دارد.

ویژه‌تابع‌های عملگر لاپلاسی یا عملگرهای مشابه به مسائل ارگودیکی یک توپ بیلیارد واجهنده و آشوب کوانتومی نیز مربوط می‌شوند. معمولاً انتظار می‌رود که وقتی $\lambda \to \infty$، ویژه‌تابع‌ها نوسانی‌تر شوند، و معرف امواجی باشند که از مرز ناحیهٔ Ω باز می‌تابند. توصیف ذره‌ای مشابه، توصیف حرکت توپ در خط مستقیم و برگشت آن پس از برخورد با مرز، طبق قوانین استاندارد فیزیک است، و این معمولاً به‌سیستمهای دینامیکی ارگودیک یا آشوبناک با مدارهای دوره‌ای [تناوبی] می‌انجامد و بعضی از ویژه‌تابع‌ها ممکن است در نزدیکی مدارهای دوره‌ای متمرکز باشند. با این حال، ثابت شده است که توزیع نُرم میانگین مربعیِ ویژه‌تابع‌های عملگر لاپلاسی، معمولاً همهٔ دنباله‌های ویژه‌مقدارها، هیچ تمرکزی را در نزدیکی یک مدار دوره‌ای نشان نمی‌دهد و توزیع آنها در یک ناحیهٔ $V \subset \Omega$ متناسب با مساحت V است. مسأله‌های مرتبط با رفتار آشوبناکی که در این وضعیت پیش می‌آید، حوزهٔ فعالی از پژوهش را تشکیل می‌دهند که انشعابات فیزیکی بسیار دارد. شکلهای چند ویژه‌تابع برای شرطهای مرزی دیریکله و نویمان، روی جلد و صفحهٔ داخل جلد نمایش داده شده‌اند.

مسائل مربوط به‌ویژه‌تابع‌ها/ویژه‌مقدارهای عملگر لاپلاسی از دیدگاه نظریهٔ پراکندگی برای معادلهٔ موج نیز قابل بررسی‌اند و به‌طور طبیعی به‌عملگرهای شرودینگر گسترش می‌یابند. تشابهات موجود بین پدیده‌های کلاسیک و کوانتومی توجه عده‌ای از فیزیکدانان و ریاضیدانان را به‌خود جلب کرده است. یک چنین پدیده‌ای مرتبط است با ویژگیِ ارگودیکِ یک توپ واجهنده و آشوب کوانتومی. معمولاً انتظار می‌رود وقتی $\lambda \to \infty$، ویژه‌تابع‌ها نوسانی‌تر شوند و معرف امواجی باشند که از مرز ناحیهٔ Ω باز می‌تابند. توصیف ذره‌ای مشابه، توصیف حرکت توپ در خط مستقیم و برگشت آن پس از برخورد با مرز، طبق قوانین استاندارد فیزیک، است و این معمولاً به سیستمهای دینامیکی ارگودیک یا آشوبناک با مدارهای دوره‌ای [تناوبی] ناپایدار می‌انجامند. پرسش جالب این است که آیا دنباله‌هایی از ویژه تابع‌ها وجود دارند که در نزدیکی مدارهای دوره‌ای متمرکز باشند و به‌این ترتیب، تصویرِ کلاسیک مدارهای دوره‌ای را به‌توزیعهای احتمال غیریکنواختی که ویژه‌تابع‌ها نشان می‌دهند مربوط سازند؟

به‌دنبالِ کارِ پیشگامانهٔ اشنیرلمان (Shnirelman)، نتایجی به‌دست آمده که ثابت می‌کند توزیع نُرم میانگین مربعیِ ویژه‌تابع‌های عملگر لاپلاسی، تحت مفروضاتی معین، هیچ تمرکزی در نزدیکی یک مدار دوره‌ای نشان نمی‌دهد و توزیع آنها در یک ناحیهٔ $V \subset \Omega$ متناسب با مساحت V است. به‌زبانِ ریاضیِ دقیق‌تر، فرض کنید $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ ویژه مقدارهای

عملگر لاپلاسی دیریکله و φ_k ویژه‌تابع متناظر باشد. حکمی از نوع اشنیرلمانی مؤید رابطهٔ زیر

$$\lim_{k\to\infty}\int|\varphi_{n_k}|^{2}dx=\frac{\mathrm{vol}(V)}{\mathrm{vol}(\Omega)}$$

به‌ازای دنباله‌های خاصی چون $\{n_k\}$ با چگالی یک است. معلوم نیست که اگر قرار دهیم $n_k=k$، پدیدهٔ توزیع یکنواخت تا چه حدی معتبر است، ولی تعدادی از حالتهای خاص به‌طور کامل بررسی شده‌اند. همچنین نتایجی در جهت تأیید پدیدهٔ مخالف به‌دست آمده است یعنی زیردنباله‌هایی وجود دارند که در آنها نُرم میانگین مربعی ویژه مقدارها در نزدیکی یک مدار دوره‌ای متمرکز است (فوره [F. Faure] و دیگران). در وبگاه `http://www.ericjhellergallery.com` می‌توان تصاویری زیبا یافت که هم اثرهای کوانتومی و هم اثرهای کلاسیک را، که برحسب جوابهای معادلات موج یا شرودینگر بیان می‌شوند، نشان می‌دهند.

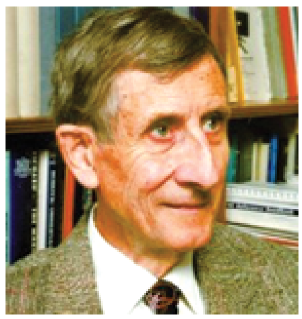
در شکلهای ۱ تا ۱۲ چند دامنه و ویژه‌تابع آنها برای شرطهای مرزی دیریکله و نویمان و منحنیهای تراز آن توابع نمایش داده شده‌اند. شکلهای پشت جلد نمایش حرکت یک توپ بیلیارد روی یک میز بیضی شکل است به‌طوری که توپ در برخورد با بیضی مرزی با زاویهٔ مساوی منعکس می‌شود.

محمد رضا مختارزاده، سید علی کتانفروش، و مهرداد شهشهانی
پژوهشگاه دانشهای بنیادی.

باز هم پوانکاره و اینشتین*

مهرداد شهشهانی**

نقد فریمن دایسن بر کتاب پیتر گلیسن با عنوان ساعتهای اینشتین، نگاشتهای پوانکاره: امپراتوران زمان، انتظاری را که خواننده از فیزیکدان برجسته‌ای چون دایسن دارد بر آورده نمی‌کند. انتساب نسبیت خاص به کسی که واقعاً کاشف آن است و اینکه چرا اینشتین



فریمن دایسن

از چنان اشتهاری برخوردار است که دانشمندان تأثیرگذارتر مانند پوانکاره، هایزنبرگ یا دیراک از آن برخوردار نیستند، دو موضوع جداگانه اما مرتبط با هم‌اند. با بررسی استدلالهای هواداران اینشتین و مقاله‌های اصلی که در این موضوع نوشته شده، معلوم می‌شود افتخار کشف نسبیت خاص را به‌نادرست به اینشتین نسبت داده‌اند.

اصل نسبیت خاص (ناوردایی قوانین فیزیک تحت ...) متعلق به پوانکاره بود و اینشتین از پیشنهاد او پیروی کرد. ریچارد فاینمن این حقیقت را در درسهایی دربارهٔ فیزیک (جلد ۱، فصلهای ۱۵ـ۱۶) پذیرفته است. پیامدهای ریاضی مستقیم این اصل، از قبیل وجود زمانهای موضعی، انقباض طول، و غیره، بر پوانکاره و دیگران معلوم بود و استنتاج آن پیامدها برای ریاضیدانی با مهارت تکنیکی فوق‌العادهٔ پوانکاره کار ساده‌ای بود. پروفسور دایسن از کتاب عامه‌فهم پوانکاره، علم و فرضیه (۱۹۰۲) یاد می‌کند و ارزش آن را تا سطح فرضیه بافی فلسفی پایین می‌آورد. تردید پوانکاره در مورد قوانین «صحیح» فیزیک (فصل ۷) بازتابی از فقدان شواهد تجربی قطعی در آن زمان بود. در سال ۱۹۱۱ بود که فیزیکدانان تحقق تجربی اصل نسبیت را عموماً پذیرفتند. ویگنر (E. Wigner) در سخنرانی ۱۹ مارس ۱۹۴۹ خود در بزرگداشت اینشتین، بر اهمیت اساسی اصل ناوردایی تحت یک گروه تبدیلات برای فیزیک و نقش اینشتین در اعلام این دیدگاه تأکید کرد. در واقع چنانکه ویگنر تا حدی پذیرفت، پوانکاره بود که این اصل را کشف کرد و بر آن تأکید نهاد، و در مقالهٔ ۱۹۰۵ اینشتین («دربارهٔ الکترو دینامیک...») چیزی وجود ندارد که نشان دهد او مطلبی بر آن افزوده یا اهمیت آن را در آن زمان به‌طور کامل درک کرده است. بسیاری از تعمیمها و نتایج دیدگاه پوانکاره از جمله اصل هموردایی (covariance) اینشتین در نسبیت عام، در فیزیک بسیار بارآور بوده است، ولی ایدهٔ اساسی اولیه متعلق به پوانکاره است.

این نظر را که افتخار ابداع نسبیت خاص باید به لورنتس (H.A. Lorentz)تعلق گیرد، دیراک (در «سخنرانی جایزهٔ اوپنهایمر») مطرح کرد و شجاعت اینشتین را نیز در جرح و تعدیل و پالایش ایده‌های لورنتس ستود. ولی با اذعان به کار پیشگامانهٔ لورنتس، امتیاز کشف نسبیت خاص باید بین لورنتس و پوانکاره تقسیم شود. با این حال، در مقالهٔ ۱۹۰۵ اینشتین، سادگی و روشنیِ دلپذیری در تشریح مطلب دیده می‌شود که مخصوصِ آثار دانشمندان استثنایی است. شیوهٔ ساده و زیبایِ اینشتین در استنتاج «قانون تابش» پلانک (۱۹۱۷) و فرمول $E=mc^{2}$ (۱۹۰۵) (فرمولی که قبلاً هم آن را می‌شناختند و کشف آن به غلط به او منسوب شده) شواهد دیگری بر روشنی ذهن و عمق ادراک اوست.

بعضی از فیزیکدانان، عدم وجود اتر را ایده‌ای انقلابی می‌دانند که متعلق به اینشتین است. حال آنکه پوانکاره می‌دانست که اتر هیچ اهمیت عملی ندارد، یعنی چون «موجود»ی اندازه ناپذیر و سترون است، وجود یا عدم وجودش یک فرضیهٔ بیهودهٔ فلسفی است. اینکه آن را خلأ بنامند یا اتر، یک موضوع لفظی است و پیامد علمی ندارد.

پروفسور دایسن در نوشتهٔ خود بر کارِ پوانکاره به‌عنوان مهندس معدن انگشت می‌گذارد ولی سخنی از خدمات مهم او و به ریاضیات به میان