# گزارش‌های علمی

## خلاصهٔ سخنرانی‌های مهرداد شهشهانی در پژوهشکدهٔ ریاضیات

شرحِ مختصری از اقامتِ مهرداد شهشهانی را در بخشِ «میهمانان پژوهشگاه» ببینید.

## Symmetric Group, Unitary Group and Zeta Function

The determination of the distribution of lengths of longest increasing subsequences of permutations is a classical problem in the combinatorics of the symmetric group. Let $\ell_N(\sigma)$ denote the length of the longest increasing subsequence of the permutation $\sigma \in \mathcal{S}_N$, and $f_{nN}$ the number of permutations $\sigma$ in $\mathcal{S}_N$ for which $\ell_N(\sigma) \leq n$. Then the generating function

$$D_n(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{f_{nN}}{(N!)^2} t^{2N}$$

can be explicitly evaluated. In fact, let $f(\theta) = e^{2t\cos\theta}$ and $f_j$ be its $j^{\text{th}}$ Fourier coefficient. The $n \times n$ Toeplitz matrix $T_n(f) = (f_{j-k}), j, k = 0, 1, \ldots, n-1$ has determinant

$$\det T_n(f) = D_n(t).$$

The quantities $f_{nN}$ are related to the traces of unitary matrices by the formula

$$f_{nN} = E_n[|\mathrm{Tr}(U)|^N],$$

where the expectation $E_n$ is computed relative to the normalized Haar measure on $U(n)$. Asymptotic behavior of determinants $\det T_n(f)$ have been studied extensively, and one obtains the formula

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}\left[\frac{\ell_N(\sigma) - \sqrt{N}}{N^{\frac{1}{6}}} \leq s\right] = e^{-\int_s^\infty (x-s) q(x)^2 dx},$$

where $q(x)$ is the solution of the differential equation $q'' + xq + 2q^3 = 0$ satisfying the asymptotic condition $q(x) \sim \mathrm{Ai}(x)$ (Airy function)as $x \to \infty$. The distribution of eigenvalues of random matrices from the Gaussian Unitary Ensemble of Hermitian matrices is of interest in nuclear physics. The largest eigenvalue$\lambda_{\max}$ of such $N \times N$ matrices has asymptotic distribution

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}[\sqrt{2}(\lambda_{\max} - \sqrt{2N})N^{\frac{1}{6}} \leq s] = F(s),$$

which has remarkable similarity to that of the longest increasing subsequence. To understand more clearly the relationship between the eigenvalues of random matrices from the Gaussian Unitary Ensemble of Hermitian matrices and statistics of permutations, let $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ be the eigenvalues of an $N \times N$ Hermitian matrix and set

$$\eta_i = N^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\lambda_i}{2N^{\frac{1}{2}}} - 1\right).$$

For a partition $N = \nu_1 + \nu_2 + \cdots$ with $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$, define

$$\xi_i = N^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\nu_i}{2N^{\frac{1}{2}}} - 1\right).$$

Partitions of $N$ are in one to one correspondence with irreducible representations of the symmetric group $\mathcal{S}_N$ and the space of representations of $\mathcal{S}_N$ is endowed with the Plancherel measure whereby the mass attached to an irreducible representation $\rho$ is $\frac{(\dim\rho)^2}{N!}$. Then the distributions of the quantities $\xi_i$ and $\eta_i$ tend to the same limiting measure as $N \to \infty$. The partition of $N = \nu_1 + \nu_2 + \cdots$ relates to the length of the longest increasing subsequence of a permutation by the Robinson-Schensted-Knuth correspondence.

The relationship between the asymptotics of random matrices from Gaussian Unitary Ensemble of Hermitian matrices and permutations can be viewed from the point of view of Wick Calculus and geometry of surfaces. Wick's calculus reduces the problem of evaluation of expectations of traces of powers of Hermitian matrices to certain combinatorial formulae involving permutations. These formulae have natural interpretation in terms of graphs $\Gamma$ on compact oriented surfaces such that the complement of $\Gamma$ is a union of discs. The geometry of asurface can be described in terms of polygons or discs attached along their boundaries. On the other hand, the classical approach to the geometry of surfaces was via studying ramified coverings of surfaces. The monodromies at the ramification points translate the problem into combinatorial questions about the symmetric group. These ideas play an important role in establishing some of the asymptotic results stated above.

Besides the Gaussian Unitary Ensemble of Hermitian matrices, it is of interest to understand the distribution of traces of powers of random matrices from the unitary, orthogonal, or symplectic groups. Using basic tools from group representations one computes the moments of traces of powers or such matrices. This calculation implies, for example in the case of the unitary group, that

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}\left[\mathrm{Tr}(U)\in B_1,\cdots,\mathrm{Tr}(U^k)\in B_k\right] = \prod_{j=1}^{k}\mathrm{Prob}[\sqrt{j}Z\in B_j],$$

where $B_j$'s are open sets in $\mathbf{C}$ and $Z$ is the standard complex normal. Similar formulae are valid for other compact classical groups.

The distribution of the eigenvalues of random unitary matrices appears to be related to distribution of zeros of the Riemann zeta function. In fact extensive numerical calculations show that the histograms of the differences of consecutive zeros of the zeta function and the differences of consecutive eigenvalues of random unitary matrices (properly normalized) are almost identical. Assuming the validity of the Riemann hypothesis, the pair correlation function of the zeros of the zeta function and that of the eigenvalues of random unitary matrices (after proper normalizations) have the same distribution. The correlation function for the distribution of eigenvalues of random unitary matrices in various interval have special statistical features. Numerical results show that the zeros of the zeta function have similar statistical properties.

Many mathematicians including (but not limited to) Aldous, Baik, Berry, Coram, Deift, Diaconis, Dyson, Gaudin, Gessel, Goulden, Hammersley, Harer, Jackson, Johansson, Kerov, Katz, Logan, Mehta, Montgomery, Odlyzko, Okounkov, Penner, Rains, Rudnick, Sarnak, Shepp, Tracy, Vershik, Widom, Wieand, Zagier and the writer have contributed to the material presented in this abstract.

## خلاصهٔ درسهای محمدرضا امامی‌خوانساری در پژوهشکدهٔ ریاضیات

شرحِ مختصری از اقامتِ دکتر امامی را در بخشِ ''میهمانان پژوهشگاه'' ببینید.

## اساسِ نظریهٔ پلی‌توپ‌های محدب و منطقِ آستانه‌ای

پلی‌توپ محدب بنا به تعریف پوشِ محدبی است از یک مجموعهٔ متناهی در $\mathbb{R}^d$. ساده‌ترین و مهم‌ترین پلی‌توپ $d$بعدی، سادکِ $d$بعدی یا $d$ـسادک نامیده می‌شود، که چیزی نیست جز پوشِ محدبِ $(d+1)$ نقطهٔ به‌طورِ آفین مستقلْ در فضای $\mathbb{R}^d$.

تبدیل‌های تصویری در مطالعهٔ ترکیبیِ مجموعه‌های محدب نقشِ اساسی دارند. یک تبدیلِ تصویری روی $\mathbb{R}^d$ با فرمولِ $\theta(x) = \frac{\Gamma(x)}{ax+\alpha}$ تعریف می‌شود، که در آن $a \in \mathbb{R}^d$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $(a,\alpha) \neq (0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{d+1}$، و $\Gamma$ یک تبدیلِ آفین روی $\mathbb{R}^d$ است. قضیهٔ زیر حقیقتی بنیادی در زمینهٔ این تبدیل‌ها در بر دارد.

**قضیه (قضیهٔ اساسیِ تبدیل‌های تصویری).** *فرض کنید $\{x_0, x_1, \dots, x_d\}$ و $\{y_0, y_1, \dots, y_d\}$ مجموعه‌هایی به‌طورِ آفین مستقل باشند و $u \in int(conv(x_0,\dots,x_d))$ و $w \in int(conv(y_0,\dots,y_d))$ نقاطِ داده‌شده‌ای باشند. در این صورت تبدیلِ تصویریِ یگانهٔ یک‌به‌یکِ $\theta$ای وجود دارد که $\theta(u) = w$ و $\theta(x_i) = y_i$، $i = 0, 1, \dots, d$.*

مطالعهٔ ترکیبیِ پلی‌توپ‌های محدب نیازمندِ شناساییِ ساختارِ وجهیِ پلی‌توپ‌ها و مفاهیمِ اولیهٔ مربوط به آن است. وجهِ $F$ از پلی‌توپ محدبِ $d$بعديِ $P$، فصلِ مشترکِ پلی‌توپ است با یک ابَرصفحهٔ متکی به آن، به این معنی که $F = P \cap H$ و $P \subset H^+$، که $H^+$ نیم‌فضای بستهٔ $H$ شاملِ $P$ است. وجوهِ $(d-1)$بعديِ یک پلی‌توپ $d$بعدی برَ (facet) هم خوانده می‌شوند. بالاخره، پلی‌توپ‌های ساده آن پلی‌توپ‌هایی هستند که هر رأس دقیقاً درونِ $d$ بَر قرار گیرد.

اکنون فرض کنید $f_i = f_i(P)$ تعدادِ وجوهِ $i$بعديِ $P$ باشد، $i = 0, 1, \dots, d-1$، و $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$ $f$ـبردارِ $P$ نامیده شود. همچنین فرض کنید $P$ یک پلی‌توپ ساده با $N$ بَر باشد. در این صورت قضیهٔ معروفِ زیر، موسوم به قضیهٔ کرانِ پایین، کرانِ پایینی برای $f_j(P)$، $j = 0, \dots, d-2$، به دست می‌دهد.

**قضیهٔ کرانِ پایین (بارنِت، ۱۹۷۲).** *فرض کنید*

$$\varphi_j(d,N) = \begin{cases} (d-1)N - (d+1)(d-2) & j = 0 \\ \binom{d}{j+1}N - \binom{d+1}{j+1}(d-1-j) & j = 1,\dots,d-2. \end{cases}$$

*در این صورت به ازای هر پلی‌توپ ساده با $N$ بَر، رابطهٔ $f_j(P)\geq\varphi_j(d,N)$ برقرار است.*

هم‌تراز با قضیهٔ کرانِ پایین قضیهٔ دیگری به نامِ قضیهٔ کرانِ بالا به‌وسیلهٔ مک‌مولن در سالِ ۱۹۷۲ ثابت شد. سرانجام، تعمیمِ این دو قضیه منتهی شد به قضیهٔ معروفِ $g$ که تمامِ $f$ـبردارهایی را که از پلی‌توپ آمده‌اند شناسایی می‌کند.

در قسمتِ دومِ این دورهٔ آموزشی یک ارتباطِ هندسی با منطقِ آستانه‌ای معرفی شد. این رشته از منطقِ توابعِ دوتایی بیشتر از جبرِ توابعِ دوتایی بهره می‌گیرد. نشان می‌دهیم که نظریهٔ پلی‌توپ‌های محدب و روش‌های هندسیِ آن در مطالعهٔ توابعِ دوتاییِ آستانه‌ای بسیار مفیدند.

هر تابعِ دوتاییِ آستانه‌ای یک نمایشِ هندسی دارد که در اینجا یک پیچیدگیِ برش نامیده می‌شود. در مطالعهٔ هندسیِ پیچیدگی‌های برشی، تابعک‌های تصویری نقشِ مهمی دارند و به‌نظر می‌رسد که این تابعک‌ها می‌توانند ما را به روش‌های بسیار مهمی در تحدب هدایت کنند.

## محاسبهٔ $\pi$ در مرکزِ محاسباتِ علمی

روشِ معمول و متداول برای نمایشِ اعدادِ حقیقی، استفاده از سیستمِ ممیزِ شناور است. انجامِ محاسبات در این سیستم می‌تواند باعثِ انباشتگیِ خطایِ ناشی از گرد کردن و ایجادِ خطایی بزرگ در نتیجهٔ نهایی شود، و این، با توجه به اینکه هیچ قضیه‌ای برای محدود کردنِ مقدارِ این خطا در حالتِ کلّی وجود ندارد، مشکلی اساسی برای این سیستم به‌شمار می‌رود.

بر این اساس، چند پروژهٔ تحقیقاتی در بارهٔ انجامِ محاسباتِ عددیِ بدونِ خطا یا حسابِ دقیقِ حقیقی انجام شده است. برای این منظور، نمایشِ جدیدی از اعداد و توابعِ حقیقی ارائه شده است که دارای خواصِ مناسبِ ریاضی بوده، به الگوریتم‌های کارآمدی برای محاسباتِ دقیق منجر می‌شود (ر.ک. [1]). در این مورد از دو زمینهٔ تحقیقاتیِ کاملاً متفاوت بهره‌گیری شده است. زمینهٔ اول، نمایشِ اعدادِ حقیقی به‌صورتِ کسرهای مسلسل است، و زمینهٔ دومْ کاربردِ قلمروهای پیوسته (continuous domains) در ریاضیات و فیزیک و کاربردِ آنها در تشکیلِ نوعِ داده (data type) برای اعداد حقیقی است. نمایشِ توابعِ مقدماتی در چارچوبِ مذکور و الگوریتم‌های کارآمد برای محاسبهٔ آنها مورد مطالعه قرار گرفته است (ر.ک. [2] و [3]).

با توجه به مطرح بودنِ محاسبهٔ ارقامِ بسطِ اعشاریِ $\pi$ به‌عنوانِ یک مسألهٔ محاسباتیِ مهم در دنیا و نیز اهمیتِ حسابِ دقیقِ حقیقی به‌عنوانِ نظریهٔ جدیدی برای انجامِ محاسبات بدونِ گرد کردن، طرحِ محاسبهٔ $\pi$ با استفاده از حسابِ دقیقِ حقیقی در مرکزِ محاسباتِ علمی پژوهشکدهٔ ریاضیات (پژوهشگاه دانشهای بنیادی) به اجرا گذاشته شد تا تحقیقی در هر دو زمینه به‌عمل آید. طبیعتاً با توجه به امکاناتِ محدودِ داخلی، توقعِ رقابت با نتایجِ به‌دست‌آمده توسطِ ابَررایانه‌های غول‌پیکر در آزمایشگاه‌های محاسباتیِ بزرگِ جهان یا شکستنِ رکوردِ دویست‌میلیاردیِ ژاپنی‌ها را وجود نداشت، بلکه مقصود از اجرای این طرح، پیشرفت و رونقِ آزمایشگاه‌های محاسبات در داخلِ کشور بوده است. قبلاً فرمولِ مناسبی برای محاسبهٔ $\pi$ در چارچوبِ حسابِ دقیق به‌دست آمده بود (ر.ک. [2])، و پاتز ضمنِ تحقیق در حسابِ دقیقِ حقیقی برنامه‌ای به زبانِ C++ نوشته بود که ۷۵۰٫۰۰۰ رقم از $\pi$ را محاسبه می‌کرد.

در مرکزِ محاسباتِ علمی برنامه‌ای به زبانِ C نوشته شده که به‌وسیلهٔ آن تا کنون ۷٫۰۰۰٫۰۰۰ رقم اعشار از $\pi$ با یک رایانهٔ Pentium-550 مجهز به دو CPU و 512MB حافظهٔ اصلی، در زمانی حدود ۷۸ ساعت محاسبه شده است. در انجامِ این پروژه ابتدا فرمول‌های قبلیِ موردِ استفاده برای محاسبهٔ $\pi$ در حسابِ دقیق به‌صورتِ ساده‌تری درآورده شد، سپس نوعِ دادهٔ مناسبی برای نمایشِ اعدادِ صحیحِ بزرگ طراحی، و الگوریتم‌های سریعِ حسابی پیاده‌سازی شد. برای ضربِ اعدادِ بزرگ از الگوریتمِ ضرب به کمکِ $FFT$ (Fast Fourier Transform)، و برای تقسیمِ آنها از *روشِ تکراریِ نیوتن برای محاسبهٔ معکوسِ اعداد* استفاده شد. همچنین با درجِ پرانتز به نحوِ مناسب در دنبالهٔ ماتریس‌هایی که در هم ضرب می‌شوند، سرعتِ عملیات به‌نحوِ چشمگیری افزایش یافت.

### مراجع


1. A. Edalat, *Domains for computation in mathematics, physics and exact real arithmetic,* Bull. Symbolic Logic **3** (1997), 401-452.

2. P.J. Potts, *Exact real arithmetic using Mobius transformations,* Ph.D. Thesis, Imperical College, London, 1998.

3. P.J. Potts and A. Edalat, *Exact real computer arithmetic,* Draft, Imperical College, London, 1997; available from `http://www.doc.ic.ac.uk/~pjp`.



مرتضی محمدنوری

پژوهشگاه و دانشگاه تهران