خلاصه‌ای از سخنرانیهای پروفسور پرِگر در مرکز

طرحهای بلوک‌ـانتقالی

یک (v, k, λ) ـ t طرح $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ متشکل است از یک مجموعهٔ v نقطه‌ای $\mathcal{P}$ و یک گردایهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های k عضوی $\mathcal{P}$ (که بلوک نامیده می‌شوند)، با این خاصیت که هر tـزیرمجموعهٔ $\mathcal{P}$ دقیقاً در λ بلوک ظاهر می‌شود. هر اتومورفیسمِ چنین طرحی، جایگشتی از $\mathcal{P}$ است که بلوک را به بلوک تبدیل می‌کند: از این رو مجموعهٔ تمامی اتومورفیسمها زیرگروهی از گروه متقارنِ $\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ تشکیل می‌دهد. اگر $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ روی $\mathcal{B}$ انتقالی باشد، آنگاه طرح بلوک‌ـانتقالی نامیده می‌شود.

خانوادهٔ tـطرحهای بلوک‌ـانتقالی خصوصیات زیادی از خود بروز می‌دهد که در خانواده‌های کلّیتری از طرحها دیده نمی‌شود. به‌عنوان مثال در tـطرحهای بلوک‌ـانتقالی، به استثنای tـطرحهای بدیهی که در آنها $\mathcal{B}$ شامل تمامیِ زیرمجموعه‌های k عضوی است، باید $t \leq ۷$، و حدس زده می‌شود که t حداکثر برابر با ۵ است (کَمِرُن و پرِگر). به‌طور کلّی برای پی بردن به ساختمان طرحهای بلوک‌ـانتقالی و یافتنِ تدبیری برای جستجوی نمونه‌هایی از این‌گونه طرحها، زیرگروههای انتقالیِ $\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$، و به‌خصوص زیرگروههای انتقالیِ ماکزیمال در $\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ نقش اساسی دارند. نتایج اخیر برای رسیدن به این هدف با تأکید خاصی بر طرحهای بلوک‌ـانتقالیِ غیراولیه روی نقاط مطرح گردید.

شرایط متناهی بودن برای عمل گروه

در سال ۱۹۵۴ بی.اچ. نیومن، قضیه‌ای در بارهٔ پوشاندنِ یک گروه مجرد با تعدادی از همدسته‌های زیرگروههای سرهٔ آن ثابت کرد. در سال ۱۹۷۶ پی.ام. نیومن، نشان داد که این نتیجه با قضیه‌ای در بارهٔ جداسازیِ زیرمجموعه‌هایی از نقاط تحت عمل گروه معادل است. شرحی از این نتیجهٔ اساسی توسط برج، برتز، مک‌دانلد و نیومن ارائه شد (۱۹۷۶):

قضیهٔ جداسازی. *فرض کنید G گروهی از جایگشتهای مجموعهٔ Ω باشد و فرض کنید Γ و Δ زیرمجموعه‌های متناهی‌ای از Ω با اندازه‌های به‌ترتیب m و n باشند. اگر کلّیهٔ Gـمدارها دارای طولِ بزرگتر از mn باشند، آنگاه عضوی مانند $g \in G$ وجود دارد که $\Gamma^g \cap \Delta = \varnothing$.*

در یک درسِ ۵ جلسه‌ای، شرحی بر این نتیجه و تعدادی از کاربردهای آن ارائه شد. به‌ویژه مفهوم حرکتِ یک زیرمجموعهٔ Γ معرفی شد: اگر به ازای هر $g \in G$، $|\Gamma^g \setminus \Gamma|$ متناهی و کراندار باشد آنگاه حرکتِ Γ، $\mathrm{mov}(\Gamma)$، را برابرِ $\max_{g \in G} |\Gamma^g \setminus \Gamma|$ تعریف می‌کنیم.

تعمیمی از قضیهٔ جداسازی نیز ثابت شد:

قضیه (پرِگر). *فرض کنید G گروهی از جایگشتهای Ω، و $\Gamma \subset \Omega$ زیرمجموعه‌ای از اندازهٔ k باشد. اگر $\mathrm{mov}(\Gamma) = m < k$، آنگاه حداقل یک Gـمدار با طولِ کوچکتر از $k^۲/(k-m)$ وجود دارد که اشتراکش با Γ تهی نیست.*

نتایج دیگری در بارهٔ حرکتِ زیرمجموعه‌ها تحت عمل گروه نشان داده شد. به‌عنوان مثال، اگر $\mathrm{mov}(\Gamma) = m$، آنگاه Γ دارای تفاضل متقارنِ با مجموعهٔ Gـپایداری از اندازهٔ حداکثر $۲em\lceil \ln(۲m) \rceil$ است (بریلَفسکی، بُسجَنیک و پرِگر). همچنین، اگر تمامی kـزیرمجموعه‌ها به ازای $m < k$ دارای حرکتِ حداکثر m باشند، آنگاه طول و تعداد Gـمدارهای غیربدیهی توسط تابعی خطی از m کراندار می‌شوند (پرِگر).

در خاتمه مسأله‌ای از گروههای مجرد (شرایط مربعات متناهی برای گروهها) و نتیجه‌ای از گروههای انتقالی با زیردرجهٔ کرانداژ مورد بحث قرار گرفت و به ارتباط آنها با قضیهٔ جداسازی اشاره شد.

خلاصهٔ سخنرانی پروفسور موروزُف در سمینار فارابی

محاسبه‌پذیری در ریاضیات

زمانی ریاضیدانِ برجستهٔ روس آ.د. تایمانُف گفته بود که در ریاضیاتِ باستان اساسیترین مسأله این بود که «ماهیت عدد چیست؟»، درحالی که در ریاضیاتِ امروزی مسأله این است: «چگونه می‌توان توابع را تعریف (محاسبه) نمود؟».

الگوریتمها هزاران سال است که شناخته شده‌اند. به‌عنوان مثال می‌توان از الگوریتم اقلیدسی برای پیدا کردنِ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکِ دو عددِ طبیعی، یا الگوریتمهای معمولِ ضرب و تقسیم که در مدارس آموخته می‌شوند نام برد.

الگوریتمها فرآیندهای خاصی هستند که کامپیوترها یا انسانها می‌توانند آنها را اجرا کنند. معمولاً هر الگوریتم شامل شرحِ کاملی است که توسط تعدادی متناهی کلمه داده می‌شود. هر الگوریتم مرحله به مرحله اجراء می‌گردد. هر مرحله از یک الگوریتم متشکل است از مجموعه‌ای از تغییراتِ مقدماتی بر روی خانواده‌ای متناهی از اطلاعات. در هر مرحله ما دقیقاً می‌دانیم که چه انجام دهیم و، اگر حافظه و وقت و کاغذِ کافی موجود باشد، تمام مراحل را می‌توان اجرا کرد ـبه‌عنوانِ مثال، پیدا کردنِ کوچکترین عدد در میانِ $۱۰^{۱۰}$ عدد، همان میزانْ اجراشدنی است که محاسبهٔ تابعِ تالی.

برای نشان دادنِ وجودِ یک الگوریتم برای حلِ یک مسأله می‌توان تنها الگوریتم را توصیف کرد و ثابت کرد که مسأله را حل می‌کند، اما برای اثباتِ وجود نداشتنِ الگوریتمی برای یک مسأله به مفهوم ریاضیِ الگوریتم احتیاج