سخنرانیهای الهام ایزدی در مرکز

الهام ایزدی در سال ۱۳۶۶ از دانشگاه پاریس VI در ریاضیات محض فارغ‌التحصیل شد. او فوق لیسانس خود را در سال ۱۳۶۷ از دانشگاه پاریس XI، و دکترایش را در سال ۱۳۶۹ از دانشگاه یوتای امریکا دریافت کرد. او از سال ۱۳۶۹ تا کنون استادیار دانشگاه هاروارد است. دکتر ایزدی از ۲۶ مرداد تا ۱۵ شهریور امسال میهمان مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات بود.

در بارهٔ نظریهٔ ناورداهای هندسی

انگیزهٔ اصلی بسط و توسعهٔ نظریهٔ ناورداهای هندسی ساختن فضاهای مدولی برای اشیاء هندسی‌ـجبری یا ناورداهای گسستهٔ معین بوده است. هدف این نظریه ساختن خارج‌قسمتهایی برای عمل گروههای جبری روی اسکیمهای جبری می‌باشد. خارج‌قسمتها را می‌توان برای عمل گروههای تحویل‌پذیر روی اسکیمهای آفین یا شبه‌تصویری ساخت.

فرض کنید X یک اسکیم جبری روی میدانِ به‌طور جبری بستهٔ k باشد و G یک گروه تحویل‌پذیر که روی X عمل می‌کند. یک خارج‌قسمت رسته‌ای از X برای عمل G نگاشتی است مانند $\pi : X \to Y$ به روی یک اسکیم Y با این خاصیت که روی مدارهای G ثابت است و به ازای هر مرفیسم $f : X \to Z$ که روی مدارهای G ثابت باشد، یک مرفیسم یکتای $h : Y \to Z$ وجود دارد که $f = h \circ \pi$.

قضیه (ناگاتا و مامفرد). فرض کنید G گروهی تحویل‌پذیر باشد که روی اسکیم آفین $X = \operatorname{Spec} A$ عمل می‌کند. در این صورت A^G، حلقهٔ پایای A برای عمل G، به‌طور متناهی تولید شده است و اگر قرار دهیم $Y = \operatorname{Spec} A^G$، آنگاه

۱) نگاشت $\pi : X \to Y$ به‌دست آمده از رابطهٔ شمول $A^G \hookrightarrow A$ یک خارج‌قسمت رسته‌ای از X برای G می‌باشد.

۲) π باز است.

۳)

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ \pi(x_1) = \pi(x_2) \Leftrightarrow \overline{G \cdot x_1} \cap \overline{G \cdot x_2} \neq \varnothing.$$

۴) اگر W زیرمجموعهٔ پایای بسته‌ای از X باشد، آنگاه $\varphi(W)$ در Y بسته است.

۵) به ازای هر Uی باز در Y، $\varphi^*|_U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))^G$ یک ایزومرفیسم است، یعنی $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$.

حال فرض کنید X یک اسکیم شبه‌تصویری باشد که G روی آن عمل می‌کند (G تحویل‌پذیر است). فرض کنید عمل G روی X خطی شده باشد، یعنی یک غوطه‌وری X در $\mathbb{P}^n$ (به ازای یک $n \in \mathbb{N}$)، و یک عمل G روی k^{n+1} ($\to \mathbb{P}^n$) وجود داشته باشد که همان عمل G روی X را القا کند. در این صورت

تعریف. ۱) نقطهٔ $x \in X$ نیمه‌پایدار نامیده می‌شود هرگاه یک چندجمله‌ای همگن f روی $\mathbb{P}^n$، ناوردا تحت G، وجود داشته باشد که

$$x \in X_f := \{y \in X : f(y) \neq 0\}.$$

۲) نقطهٔ $x \in X$ پایدار نامیده می‌شود اگر fای با خواص فوق وجود داشته باشد که $x \in X_f$ و تمام مدارهای G در X_f بسته باشند.

زیرمجموعه‌های باز متشکل از نقاط نیمه‌پایدار و پایدارِ X را به‌ترتیب با X^{ss} و X^s نشان می‌دهیم.

قضیه. فرض کنید X و G همانند بالا باشند. در این صورت

۱) یک خارج‌قسمت رسته‌ای $\pi : X^{ss} \to Y$ از X^{ss} برای G وجود دارد.

۲) π آفین و باز است و $\mathcal{O}_Y = (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$.

۳) یک شیفِ وارون‌پذیر و وسیع (ample) M روی Y وجود دارد که به ازای یک $q \in \mathbb{N}$، $\pi^* M = \mathcal{O}_X(q)$ که در آن $\mathcal{O}_X(1) = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)]|_X$. به‌ویژه، Y شبه‌تصویری است.

۴) تصویر X^s در Y باز است.

۵) به‌ازای هر $x_1, x_2 \in X^{ss}$،

$$\pi(x_1) = \pi(x_2) \Leftrightarrow G \cdot x_1 \cap G \cdot x_2 \cap X^{ss} \neq \varnothing.$$

۶) اگر X تصویری باشد آنگاه Y نیز چنین است.

در ادامه، محک عددی هیلبرت‌ـمامفرد برای پایدار بودن را بیان و مثالی از فضای مدولی ۴ نقطه در $\mathbb{P}^1$ (یا خمهای بیضوی) را به همراه جزئیات آن بررسی خواهیم کرد.

مرجع

D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, New York, 1966.