گرگوری مارگولیس و هیلل فورستنبرگ

برندگان جایزهٔ آبل ۲۰۲۰

گرگوری مارگولیس

هیلل فورستنبرگ

فرهنگستان علوم و ادبیات نروژ جایزهٔ آبل ۲۰۲۰ را به دو ریاضیدان برجسته، گرگوری مارگولیس (Gregory Margulis) و هیلل فورستنبرگ (Hillel Furstenburg)، به خاطر «پیشگامی آنها در استفاده از روش‌های احتمالات و دینامیک در نظریهٔ گروه‌ها، نظریهٔ اعداد، و ترکیبیات» اهدا کرد.

نام این جایزه برگرفته از نام نیلس هنریک آبل ریاضیدان بزرگ نروژی در قرن نوزدهم است. جایزهٔ آبل (به مبلغ ۷/۵ میلیون کرون نروژ) یکی از معتبرترین جوایز بین‌المللی ریاضی است و از سال ۲۰۰۳ هر ساله طی مراسمی از طرف فرهنگستان نروژ توسط پادشاه نروژ به یک یا دو ریاضیدان برجسته اهدا می‌شود و تاکنون به این ریاضیدانان نامی تعلق گرفته است: **ژان پیر سر، مایکل اتیا، ایزادور سنیگر، پیتر لکس، لنارت کارلسون، سرینیواسا وارادان، جان تامپسون، ژاک تیتس، میخائیل گروموف، جان تیت، جان میلنر، آندره سمردی، پیر دلینی، یاکوف سینایی، جان نش، لوئیس نیرنبرگ، اندرو وایلز، ایو مِیِر، رابرت لنگ‌لندز، کارن اولنبک، هیلِل فورستنبرگ، و گرگوری مارگولیس.**

در صفحات بعد شرح مختصری دربارهٔ بعضی از مهم‌ترین آثار گرگوری مارگولیس، به قلم کیوان ملاحی کارای استاد دانشگاه یاکوبز در برمن، آلمان، می‌آید.

نگاهی به سه اثر گریگوری مارگولیس •

کیوان ملاحی کارای
دانشگاه یاکوبز، آلمان

گریگوری مارگولیس زادهٔ ۱۹۴۶ در مسکو و در حال حاضر استاد دانشگاه ییل در آمریکاست. در آوریل ۲۰۲۰ او و هیلل فورستنبرگ مشترکاً جایزهٔ آبل را دریافت کردند. پیش از این، مارگولیس در سال ۱۹۷۸ برندهٔ جایزهٔ فیلدز و در سال ۲۰۰۵ برندهٔ جایزهٔ ولف شده بود.

نگاهی جامع به مجموعهٔ کارهای ژرف و گستردهٔ مارگولیس که در نیم قرن گذشته منجر به دگرگونی شاخه‌های متعددی از ریاضیات مانند زیرگروه‌های گسستهٔ گروه‌های لی، دینامیک همگن (homogeneous dynamics)، و حوزه‌هایی از ترکیبیات شده است، حوصله‌ای بیش از ظرفیت این نوشتهٔ کوتاه می‌طلبد. سعی ما بر این خواهد بود که با ذکر کردن برخی کلیدواژه‌ها و عناوین، نگاهی گذرا به بعضی از این کارها بیندازیم. در این نوشته مختصراً به سه موضوع در مجموعه‌کارهای مارگولیس خواهیم پرداخت. خوانندگان علاقه‌مند به پیگیری این موضوع‌ها می‌توانند به اصل مقالات رجوع کنند.

۱. اَبَرصُلبیت و حسابیّت شبکه‌ها در گروه‌های لیِ نیمه‌ساده

زیرگروه Γ از گروه لی G را یک زیرگروه گسسته می‌نامیم هرگاه همسایگی U از عضو خنثای e وجود داشته باشد به طوری که $U \cap \Gamma = \{e\}$. اگر Γ زیرگروهی گسسته از G باشد، آنگاه Γ را یک شبکه (lattice) می‌نامیم اگر اندازهٔ احتمالی روی فضای خارج قسمت G/Γ وجود داشته باشد که تحت عمل انتقال از چپ G تعریف شده با

$$g \cdot (x\Gamma) = gx\Gamma$$

ناوردا باشد. شاید آشناترین مثال از مفهوم شبکه، زیرگروه گسستهٔ $\mathbb{Z}^d < \mathbb{R}^d$ باشد. در این مثال، اندازهٔ لبگ روی فضای خارج قسمت $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ (چنبرهٔ dبعدی) متناهی است. مفهوم شبکه را می‌توان معادلا این‌طور تعریف کرد: مجموعهٔ اندازه‌پذیر $F \subseteq G$ را یک ناحیهٔ بنیادی (fundamental domain) برای Γ می‌نامیم اگر انتقال‌های آن توسط اعضای Γ تمام G را بپوشاند و اشتراک هر دو انتقال آن اندازهٔ صفر داشته باشد. به عبارت دیگر، در مثال بالا مجموعهٔ بردارهای با درایه‌های بین صفر و یک، یک ناحیهٔ بنیادی فشرده برای زیرگروه گسستهٔ Γ است.

در دهه‌های ۵۰ و ۶۰ میلادی، تحقیقات زیادی در زمینهٔ خواص شبکه‌ها در گروه‌های پوچ‌توان و حل‌پذیر انجام شد. بخشی از فعالیت‌های ریاضیدانانی مانند مالسف (Malcev) و مستوو (Mostow) وقف شناخت شبکه‌ها در این خانواده از گروه‌ها شد. شرح نسبتاً کاملی از این کارها را می‌توان در [Rag72] یافت. برای مثال گروه‌های پیوسته و گسستهٔ هایزنبرگ سه‌بعدی را در نظر بگیرید:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

در این صورت Γ یک شبکه در G است. می‌توان نشان داد که اگر Γ شبکه‌ای در گروه پوچ‌توان یا حل‌پذیر G باشد، آنگاه G/Γ فشرده است و به طریقی «حسابی» ساخته شده است.

وضعیت در مورد گروه‌های لی نیمه‌ساده (semisimple) متفاوت است. برای مثال، گروه $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ متشکل از ماتریس‌های $d \times d$ با دترمینان واحد را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد که زیرگروه $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ متشکل از ماتریس‌های با درایه‌های صحیح یک شبکه در $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ است. اما برخلاف قبل، اثبات این حکم نابدیهی و استوار بر نظریهٔ تحویل (reduction theory) مینکوفسکی و محاسبهٔ صریح حجم یک ناحیهٔ بنیادی برای $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ است. همچنین

برخلاف مثال‌های بالا، فضای خارج قسمت $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ فشرده نیست. آرمان بورل (Armand Borel) و هریش چندرا (Harish-Chandra) وجود شبکه‌ها در گروه‌های لیِ نیمه‌ساده را نشان دادند. این شبکه‌ها نیز مانند مثال‌های بالا ریشهٔ حسابی دارند.

خمینه‌های هذلولوی با حجم متناهی منبع دیگری برای تولید شبکه‌ها در خانوادهٔ خاصی از گروه‌های لی هستند. منظور ما از یک خمینهٔ هذلولوی با بعد d خمینهٔ ریمانی M است که بتوان آن را به صورت خارج قسمت

$$M = \mathbb{H}^d/\Gamma$$

نمایش داد. در اینجا $\mathbb{H}^d$ فضای هذلولوی d بعدی و Γ گروه بنیادی M است که با تبدیلات طول‌پا بر $\mathbb{H}^d$ عمل می‌کند. از آنجایی که گروه تبدیلات طول‌پا و جهت‌نگهدار $\mathbb{H}^d$ با گروه $SO(d,1)$ یکریخت است، می‌توان دید که $\pi_1(M)$ شبکه در $SO(d,1)$ خواهد بود.

ملاحظه می‌شود که ساختار جبری $\Gamma := \pi_1(M)$ در بعد $d = 2$ ساختار هذلولوی M را مشخص نمی‌کند. در واقع فضای ساختارهای هذلولوی روی خمینهٔ هذلولوی با گونهٔ g، خود دارای ساختار خمینه‌ای $6g-6$ بعدی مشهور به فضای تایشمولر است. نتیجهٔ این موضوع این است که شبکه‌های گروه $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ لزوماً حسابی نیستند. اما در سال ۱۹۶۸ مستوو نشان داد که وضعیت در بعدهای بالاتر کاملاً متفاوت است. قضیهٔ صلبیت (rigidity theorem) مستوو می‌گوید که اگر (M_1, g_1) و (M_2, g_2) دو خمینهٔ هذلولوی فشرده با بعد $d > 2$ باشند و $\phi : \pi(M_1) \to \pi_1(M_2)$ یک یکریختی گروه‌های بنیادی آنها باشد، در این صورت یک طول‌پایی

$$f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

وجود دارد به طوری که نگاشت القایی متناظر آن همان $\phi = f_*$است. شگفت‌انگیزی این قضیه در این است که نشان می‌دهد توپولوژی خمینه‌های هذلولوی با بعد بیشتر از ۲، هندسهٔ آنها را به طور کامل معین می‌کند. قضیه اَبَر صُلبیت (super-rigidity theorem) مارگولیس تعمیم ژرفی از این قضیه است که تحت شرایطی بسیار کلی، همریختی‌های

$$\phi : \Gamma \to H$$

را رده‌بندی می‌کند. حالت خاصی از این قضیه را بدون یادآوری جزئیات بیان می‌کنیم. فرض کنیم G گروه جبری نیمه‌ساده و همبندساده باشد به طوری که رتبهٔ حقیقی (real rank) آن دست‌کم برابر ۲ باشد و $\mathbb{G}(\mathbb{R})^\circ$ هیچ مؤلفهٔ فشرده‌ای نداشته باشد. همچنین فرض کنید Γ یک شبکهٔ تحویل‌ناپذیر در $\mathbb{G}(\mathbb{R})^\circ$ ، و $\mathbb{H}$ یک گروه جبری همبند و تعریف‌شده بر روی $\mathbb{R}$ است به طوری که هیچ زیرگروه نرمال نابدیهی تعریف‌شده بر روی $\mathbb{R}$ ندارد. اگر

$$\phi : \Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{R})$$

یک همریختی باشد به نحوی که $\phi(\Gamma)$ در H زاریسکی‌ـ چگال باشد و $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ فشرده نباشد، آنگاه می‌توان ϕ را به یک همریختی

$$\bar{\phi} : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$$

گسترش داد. به کمک صورتی کلی‌تر از قضیهٔ اَبَرصُلبیت که به همریختی‌ها در گروه‌های pـ ادیک هم اعمال‌شدنی است، مارگولیس حدس اتله سلبرگ (Atle Selberg) و ایلیا پیاتتسکی شاپیرو (Ilya Piatetski-Shapiro) در مورد حسابیت (arithmeticity) شبکه‌ها در گروه‌های نیمه‌ساده با رتبهٔ بیشتر از ۱ را ثابت کرد [Mar84]. این دو قضیه را می‌توان در زمرهٔ تأثیرگذارترین نتایج مارگولیس به حساب آورد. بهترین منبع برای این موضوعات، [Mar89] است.

۲. گراف‌های گسترنده

نظریهٔ گراف‌های گسترنده (expander graphs) امروز یکی از شاخه‌های پویای ترکیبیات است. به طور شهودی، گراف گسترنده گرافی است که در عین «تنک بودن» (کوچک بودن درجهٔ رئوس) از خواص همبندی قوی‌ای نیز برخوردار است. ثابت چیگر (Cheeger) برای گراف متناهی G چنین تعریف می‌شود:

$$h(G) = \min\left\{\frac{|\partial A|}{|A|} : A \subseteq V(G),\ 1 \le |A| \le \frac{1}{2}|V(G)|\right\}.$$

در اینجا ∂A مجموعهٔ یال‌هایی از G را نشان می‌دهد که یک سر در A و سر دیگر در $V(G)\backslash A$ دارند. گراف G را $(d,\epsilon)-$ گسترنده می‌خوانیم هرگاه درجهٔ هر رأس آن حداکثر d باشد و همچنین $h(G) \ge \epsilon$.

گراف‌های گسترنده که در دههٔ شصت قرن بیستم توسط کولموگوروف و بارزدین (Barzdin) [Kol93] و کمی بعدتر مستقلاً توسط پینسکر [Pin73] کشف شدند، امروز نقشی اساسی در ریاضیات و علوم کامپیوتر نظری دارند. فرض کنید G گرافی متناهی باشد. می‌دانیم که در حالت کلی نمی‌توان G را در صفحه چنان نشاند که یال‌های بدون رأس مشترک یکدیگر را قطع نکنند. به سادگی می‌توان دید که چنین نشاندنی در $\mathbb{R}^3$ همیشه ممکن است. نقطهٔ شروع مقالهٔ کولموگوروف و بارزدین سؤال زیر است: فرض کنید بخواهیم گراف G را در مکعبی به ضلع $L := L(n,d)$ چنان بنشانیم که (۱) فاصلهٔ بین

دو یال بدون رأس مشترک همیشه بیش از ۱ بماند و (۲) فاصلهٔ هر دو رأس متمایز هم دست‌کم ۱ باشد. در این صورت، دربارهٔ حداقل مقدار L که برای همهٔ گراف‌های با n رأس و بیشترین درجهٔ k کارساز باشد چه می‌توان گفت؟ در این مقاله کولموگوروف و بارزدین ابتدا ثابت می‌کنند که برای این کار مکعبی به ضلع $L = C(d)N^{1/2}$ همواره کافی است. برای اثبات بهینه بودن این کران، آنها نشان می‌دهند که برای خانواده‌ای از گراف‌های گسترنده امکان بهبود این کران (به استثنای احتمالاً ثابت $C(d)$) وجود ندارد. اثبات کولموگوروف و بارزدین برای وجود چنین گراف‌هایی مبتنی بر روشی احتمالاتی است و دستور صریحی برای ساختن خانواده‌ای نامتناهی از چنین گراف‌هایی ارائه نمی‌دهد. در سال ۱۹۷۳ پینسکر نیز از زاویه‌ای دیگر گراف‌های گسترنده را کشف کرد و اثبات احتمالاتی دیگری برای وجود چنین گراف‌هایی عرضه کرد. کمی بعد، مارگولیس اولین دستور ساخت صریح برای تولید گراف‌های گسترنده را ارائه داد [Mar73]. در اینجا صورت تغییریافته‌ای از گراف‌های مارگولیس را توصیف می‌کنیم. فرض کنید $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ و همریختی

$$\pi_N : \Gamma \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

نگاشت کاهش به پیمانهٔ N باشد. مجموعهٔ مولد متناهی و متقارن S برای Γ را در نظر بگیرید. فرض کنید G_N گراف کیلی $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ نسبت به مجموعهٔ مولد $S_N := \pi_N(S)$ باشد. به عبارت دیگر، رأس‌های G_N متشکل از اعضای $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ هستند و رأس‌های g و h مجاور تعریف می‌شوند هرگاه $h^{-1}g \in S_N$. با کمک خاصیت (T) کاژدان (Kazhdan) و با استفاده از توصیف طیفی گسترنده بودن، می‌توان نشان داد که برای مقادیر مناسبی از ϵ گراف‌های G_N همگی $(d,\epsilon)-$ گسترنده هستند. ویژگی کارساز گروه $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ این خاصیت این گروه (مشهور به خاصیت (T) کاژدان) است که نمایش بدیهی این گروه در فضای همهٔ نمایش‌های یکانی آن یک نقطهٔ تنهاست. اثبات این ویژگی برای گروه $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ مستقیم و نسبتاً کوتاه است. اثبات کاژدان برای $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ متکی به این است که $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z} < \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}))$ یک شبکه است. برای دیدن جزئیات این اثبات و مطالب مربوط خواننده را به [Lub10] ارجاع می‌دهیم.

۳. حدس اُپنهایم و دینامیک تک‌توان

فرض کنید Q یک فرم مربعی ناتباهیده روی $\mathbb{R}^d$ باشد و $\min(p,q) \geq 1$. به سادگی می‌توان دید که این شرط معادل است با اینکه $Q(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}$ و همچنین با اینکه گروه متعامد $SO(Q)$ یک گروه لیِ غیرفشرده باشد.

قضیه‌ای کلاسیک از مایر (Meyer) می‌گوید اگر ضرایب Q گویا باشند و $d \geq 5$ ، آنگاه Q روی $\mathbb{Z}$ صفر را نمایش می‌دهد، یعنی بردار صحیح و ناصفر $x \in \mathbb{Z}^d$ وجود دارد که $Q(x) = 0$. شاید با الهام از این قضیه، الکساندر اپنهایم (Oppenheim) در سال ۱۹۲۹ این حدس را مطرح کرد که اگر Q ناگویا باشد و $d \geq 3$ ، آنگاه صفر یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ مقادر Q روی بردارهای صحیح است، یعنی صفر متعلق به بستار مجموعهٔ

$$\left\{Q(x) : x \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

است. فرم Q ناگویا نامیده می‌شود هرگاه فرمی با ضرایب صحیح وجود نداشته باشد که مضربی از Q باشد. روشن است که هم ناگویا و هم نامعین بودن فرم برای درستی این حدس لازم هستند.

این سؤال مدت‌ها مسئله‌ای در قلمرو نظریهٔ تحلیلی اعداد قلمداد می‌شد و تلاش‌های اولیه برای اثبات حالت‌هایی خاص (از جمله برای فرم‌های قطری و فرم‌های با بیش از ۲۱ متغیر) همگی مبتنی بر استفاده از روش‌های تحلیلی موجود مانند «روش دایره» (the circle method) بوده‌اند. اولین گام در جهت حل این مسئله، مشاهده‌ای ساده اما عمیق از م.س. راگوناتان (M.S. Raghunathan) بود که در حدود سال ۱۹۸۰ دریافت که حدس اپنهایم صورت‌بندی معادلی در نظریهٔ سیستم‌های دینامیکی همگن دارد. به علاوه او حدسی کلی‌تر در این چارچوب دینامیکی طرح کرد که به حدس راگوناتان مشهور شد. برای توصیف صورت‌بندی دینامیکی حدس اپنهایم به چند تعریف نیازمندیم. فضای خارج قسمت

$$\mathcal{L}_n := \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$$

را در نظر بگیرید. این فضا توصیف مفید دیگری نیز دارد. فرض کنید L شبکه‌ای در $\mathbb{R}^d$ باشد. به سادگی می‌توان دید که ماتریس وارون‌پذیر $g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ وجود دارد که $\Lambda = g\mathbb{Z}^d$ ، و ماتریس g با تقریب ضرب از سمت راست در عضوی از $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ به طور یکتا تعریف می‌شود. به‌علاوه، اگر ناحیهٔ بنیادی Λ حجم واحد داشته باشد آنگاه $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$.

به این ترتیب می‌توان تناظری یک‌به‌یک بین شبکه‌های با حجم یک و همدسته‌های

$$\Lambda \mapsto g\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z}) \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$$

پیدا کرد. بنا بر نکته‌ای که در بالا ذکر شد، می‌توان فضای $\mathcal{L}_n$ را به اندازهٔ احتمالی ناوردا تحت عمل $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ مجهز کرد.

بررسی خواص دینامیکی عمل زیرگروه‌های $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ بر $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ موضوعی در سیستم‌های دینامیکی همگن است.

راگوناتان دریافت که حدس اپنهایم را می‌توان به شکل زیر صورت‌بندی کرد: فرض کنید که Q یک فرم مربعی با علامت $(۲,۱)$ روی $\mathbb{R}^۳$ باشد. گروه متقارن $H = \mathrm{SO}(Q)$ متناظر با Q به عنوان زیرگروهی از $\mathrm{SL}_۳(\mathbb{R})$ بر فضای $\mathrm{SL}_۳(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_۳(\mathbb{Z})$ عمل می‌کند. حدس اپنهایم معادل این حکم است که هر مدار H که بستار فشرده داشته باشد، حتماً فشرده است. در اثبات مارگولیس از این حکم، به شکلی غیرقابل‌اجتناب از زبان دینامیکی استفاده می‌شود. یکی از اجزای پراهمیت اثبات، ویژگی‌های دینامیکی زیرگروه‌های تک‌توان است. زیرگروه U از $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ را تک‌توان می‌نامیم هرگاه برای هر $u \in U$ همهٔ مقادیر ویژهٔ u برابر یک باشند. کمی بعد از اثبات مارگولیس برای حدس اپنهایم، مارینا رتنر موفق به اثبات حدس کلی‌تر راگوناتان شد [Rat 91b, Rat 91a]. اثبات رتنر حدس توپولوژیک راگوناتان را به رده‌بندی اندازه‌های ناوردا تحت زیرگروه‌های تک‌توان تقلیل می‌دهد. اثبات دیگری برای قضیهٔ رتنر را مارگولیس و تومانوف در [MT94] ارائه داده‌اند.

اثبات مارگولیس برای حدس اپنهایم و کاربردهای قضایای رتنر حاصل‌خیزی نگرش دینامیکی به مسائل حوزه‌های دیگر ریاضیات را به روشنی نشان داده‌اند. شاید مشهورترین مسئلهٔ باز در این حوزه، حدس لیتلوود باشد که می‌گوید که برای همهٔ مقادیر حقیقی $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} n\|\alpha\|\|\beta\| = ۰,$$

که در اینجا $\|\alpha\| = \min\{|\alpha - n| : n \in \mathbb{Z}\}$. با کمک ابزار دینامیک همگن، اینزیدلر، کاتک، و لیندن‌شتراوس نشان داده‌اند [EKL06] که بعد هاسدورفِ مجموعهٔ مثال‌های نقضِ حدس لیتلوود صفر است.

سپاسگزاری

از دوستانم علیرضا صالحی گل‌سفیدی و امیر محمدی از بابت پیشنهادهای مفیدشان برای بهسازی مقاله ممنونم.

مراجع

[EKL06] **Manfred Einsiedler**, **Anatole Katok**, **Elon Lindenstrauss**, *Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture*, Ann. of Math. **164** (2) (2006), 513-560.

[Kol93] A.N. **Shiryayev** (Ed.), Selected Works of A. N. Kolmogorov, Volume III: Information Theory and the Theory of Algorithms, Springer, Dordrecht, 1993.

[Lub10] Alex **Lubotzky**, Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures, Birkhäuser, Basel, 1994, with Jonathan D. **Rogawski** (Ed.) appendix, 2010.

[Mar73] G.A. **Margulis**, *Explicit constructions of expanders*, Problemy Peredači Informacii **9** (4) (1973), Russian, 71–80 .

[Mar84] G.A. **Margulis**, *Arithmeticity of the irreducible lattices in the semi-simple groups of rank greater than 1*, Invent Math **76** (1984), 93–120.

[Mar89] G.A. **Margulis**, *Discrete Subgroups and Ergodic Theory*, in Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups, Symposium in Honor of Atle Selberg, Oslo, Norway, (July 14–21 1987), Academic Press, Boston (1989), 377-398.

[MT94] G.A. and **Margulis**, G.M. **Tomanov**, *Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces*, Invent Math **116** (1994), 347–392.

[Pin73] M. **Pinsker**, *On the complexity of a concentrator*, in 7th International Telegraffic Conference (1973), Stockholm, 318/1-318/4.

[Rag72] M.S. **Raghunathan**, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1972.

[Rat91a] Marina **Ratner**, On Raghunathan's Measure Conjecture, Ann. of Math. **134** (3) (1991a), 545-607.

[Rat91b] Marina **Ratner**, *Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows*, Duke Math. J., **63** (1) (1991b), 235-280.